$k,\ \alpha,\ \beta\ (a<\beta)$ は実数とする．放物線 $y=x^2$ と直線 $y=kx+1$ の 2 つの交点を点 $\mathrm{P}(a,\ \alpha^2)$，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ とする．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) $\alpha\beta$ の値を求め，$\alpha+\beta,\ \alpha-\beta$ を k を用いて表しなさい．

(2) 点 P，点 Q における放物線の接線をそれぞれ $l,\ m$ とする．いま，直線 $l,\ m$ の交点を点 R とするとき，点 R の x 座標を $\alpha,\ \beta$ を用いて表しなさい．

(3) 放物線 $y=x^2$ と直線 $l,\ m$ で囲まれる図形の面積 S を k を用いて表しなさい．

(23 福島大 後 食農 4)

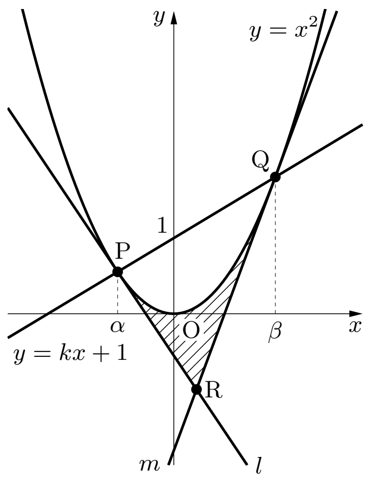
【答】

(1) $\alpha\beta=-1,\ \alpha+\beta=k,\ \alpha-\beta=-\sqrt{k^2+4}$

(2) $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

(3) $S=\dfrac{1}{12}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}$

【解答】



(1) $\alpha,\ \beta$ は放物線 $y=x^2$ と直線 $y=kx+1$ の交点の x 座標であるから

$$x^2=kx+1$$
$$\therefore\quad x^2-kx-1=0$$

の実数解である．解と係数の関係より

$$\begin{cases}\alpha+\beta=\boldsymbol{k}\\ \alpha\beta=\boldsymbol{-1}\end{cases}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．また

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=k^2+4$$

であり，$\alpha-\beta<0$ なので

$$\alpha-\beta=\boldsymbol{-\sqrt{k^2+4}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $(x^2)'=2x$ なので，l の方程式は

$$l:y=2\alpha(x-\alpha)+\alpha^2$$
$$\therefore\quad y=2\alpha x-\alpha^2$$

であり，同じく，m の方程式は

$$m:y=2\beta x-\beta^2$$

である．直線 $l,\ m$ の交点 R の x 座標は

$$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$$
$$2(\alpha-\beta)x=\alpha^2-\beta^2$$

であり，$\alpha-\beta\neq 0$ なので

$$\boldsymbol{x=\frac{\alpha+\beta}{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 求める面積 S は

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} \{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}\,dx \\
&= \int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} (x-\alpha)^2\,dx + \int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} (x-\beta)^2\,dx \\
&= \left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-\beta)^3\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta} \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3 \\
&= \frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{12}(k^2+4)^{\frac{3}{2}}} \quad (\because\ (1)) \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.