座標平面上の円 $C_1 : x^2+y^2=1$ および放物線 $C_2 : y=cx^2+1$ を考える．ただし c は正の定数とする．さらに円 C_1 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ をとるとき，次の問いに答えなさい．

(1) 点 B における円 C_1 の接線が放物線 C_2 に接する．定数 c の値を求めなさい．
(2) (1) の接線の C_2 上の接点を P とする．点 P の座標を求めなさい．
(3) 次の 3 つの線で囲まれた部分の面積を求めなさい．

- 円 C_1 上の点 A と点 B を結ぶ弧のうち，短い方
- 放物線 C_2 の点 A から点 P の部分
- 線分 BP

(23 福島大 人間発達文化 5)

【答】

(1) $c=\dfrac{1}{4}$

(2) $\mathrm{P}\left(2\sqrt{3},\ 4\right)$

(3) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$

【解答】

$$C_1 : x^2+y^2=1$$

$$C_2 : y=cx^2+1 \ (c \text{ は正の定数})$$

(1) $\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)$ における円 C_1 の接線 l の方程式は

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1$$

$$\therefore\quad l : y=\sqrt{3}x-2$$

である．これが放物線 C_2 と接するから，2 次方程式

$$cx^2+1=\sqrt{3}x-2$$

$$\therefore\quad cx^2-\sqrt{3}x+3=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

は重解をもつ．①の判別式を D とおくと

$$D=3-4\cdot c\cdot 3=3(1-4c)$$

であり，$D=0$ より

$$\boldsymbol{c=\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 接点 P の x 座標は，$c=\dfrac{1}{4}$ のときの ①，すなわち，$x^2-4\sqrt{3}x+12=0$ の重解であり

$$x=2\sqrt{3}$$

である．したがって，P の y 座標は

$$y=\frac{1}{4}(2\sqrt{3})^2+1=4$$

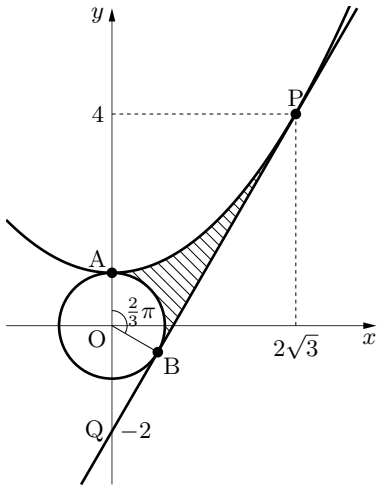
であり，P の座標は

$$\boldsymbol{\mathrm{P}\left(2\sqrt{3},\ 4\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 与えられた部分は右図の斜線部分である．

$\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{2}{3}\pi$ であり，直線 l と y 軸の交点は $(0,\ -2)$ である．この点を Q とおくと，求める面積 S は，放物線 C_2 の A から P の部分と 2 線分 AQ，PQ で囲まれた部分の面積から，三角形 OBQ と扇形 OAB の面積を除いたものである．



$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{2\sqrt{3}} \left\{ \left(\frac{1}{4}x^2 + 1 \right) - (\sqrt{3}x - 2) \right\} dx \\
&\qquad - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}\pi \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\sqrt{3}} (x - 2\sqrt{3})^2\, dx - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \\
&= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{3}(x - 2\sqrt{3})^3 \right]_0^{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \\
&= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{3}}
\end{aligned}
$$

……(答)

である．