3 次関数 $f(x)$ は常に $f(-x)=-f(x)$ を満たし，$x=1$ のときに極大値 2 をとる．このとき，以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ を求めよ．

(2) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた 2 つの部分のうち，$y \geqq 0$ の領域にある部分を D とする．直線 $y=ax$ が D の面積を 2 等分するように a の値を定めよ．

(23 群馬大 理工 (物質・環境)・情報 5)

【答】

(1) $f(x)=-x^3+3x$

(2) $a=3-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

【解答】

(1) 3 次関数 $f(x)$ を $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とおくと，$f(x)$ は常に $f(-x)=-f(x)$ を満たすから

$$a(-x)^3+b(-x)^2+c(-x)+d=-(ax^3+bx^2+cx+d)$$
$$-ax^3+bx^2-cx+d=-ax^3-bx^2-cx-d$$
$$\therefore\quad 2(bx^2+d)=0$$

これが常に成り立つ条件は

$$b=d=0$$

すなわち

$$f(x)=ax^3+cx$$

である．また，$f(x)$ は $x=1$ のときに極大値 2 をとるから

$$(*)\begin{cases} f'(1)=0 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

が必要である．$f'(x)=3ax^2+c$ より

$$(*) \iff \begin{cases} 3a+c=0 \\ a+c=2 \end{cases} \qquad \therefore\quad a=-1,\ c=3$$

このとき

$$f(x)=-x^3+3x,$$
$$f'(x)=-3x^2+3=-3(x+1)(x-1)$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$

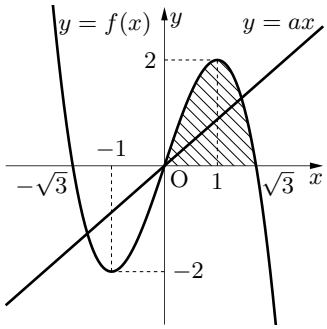
$x=1$ のときに極大値 2 をとるから十分である．

よって，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{f(x)=-x^3+3x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $f(x) = -x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$ より，与えらた領域 D は右図の斜線部分である．



直線 $y = ax$ が領域 D の面積を二つに分ける条件は

$$0 < a < f'(0)$$
$$\therefore \quad 0 < a < 3 \qquad \cdots\cdots ①$$

である．このとき，領域 D の境界 $y = f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \sqrt{3})$ と直線 $y = ax$ で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とおくと，直線 $y = ax$ が領域 D の面積を二等分する条件は

$$S(a) = \frac{1}{2}S(0) \qquad \cdots\cdots (*)$$

である．曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax$ の交点の x 座標は

$$-x^3 + 3x = ax$$
$$x\{x^2 - (3-a)\} = 0$$
$$\therefore \quad x = 0,\ \pm\sqrt{3-a}$$

であるから

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_0^{\sqrt{3-a}} \{(-x^3+3x) - ax\}\,dx \\ &= \left[\frac{3-a}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^{\sqrt{3-a}} \\ &= \frac{(3-a)^2}{2} - \frac{(3-a)^2}{4} \\ &= \frac{(3-a)^2}{4} \end{aligned}$$

したがって

$$(*) \iff \frac{(3-a)^2}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{9}{4}$$
$$\therefore \quad a = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$$

① より

$$\boldsymbol{a = 3 - \frac{3\sqrt{2}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．