$a>0$ とし，曲線 $C_1 : y=5x^2$ と曲線 $C_2 : y=x^2+4a^2$ を考える．C_1 と C_2 の共有点のうち，x 座標が正のものを P とし，P における C_2 の接線を ℓ とする．次の問いに答えよ．

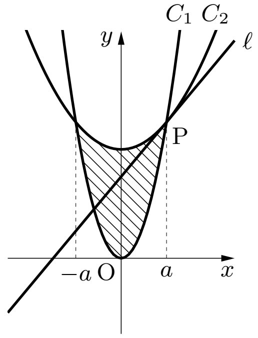
(1) P の座標と ℓ の方程式を求めよ．
(2) C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ．
(3) C_1 と ℓ で囲まれた図形の面積を T とする．(2) で求めた S との比 $\dfrac{T}{S}$ を求めよ．

(23 金沢大 文系 1)

【答】
(1) $\mathrm{P}(a,\ 5a^2)$, $\ell : y=2ax+3a^2$
(2) $\dfrac{16}{3}a^3$
(3) $\dfrac{16}{25}$

【解答】

$$C_1 : y=5x^2$$
$$C_2 : y=x^2+4a^2$$



(1) $f(x)=5x^2,\ g(x)=x^2+4a^2$ とおく．
　$C_1,\ C_2$ の共有点の x 座標は

$$5x^2=x^2+4a^2 \qquad \therefore \quad x=\pm a$$

　P は x 座標が正の共有点であるから，P の座標は

$$\boldsymbol{(a,\ 5a^2)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

　である．
　また $g'(a)=2a$ より，ℓ の方程式は

$$y=2a(x-a)+5a^2$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y=2ax+3a^2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

　である．
(2) C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $\pm a$ であるから

$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a} \{g(x)-f(x)\}\,dx \\ &= 2\int_0^a (-4x^2+4a^2)\,dx \quad (\because\ 偶関数) \\ &= 2\Big[-\frac{4}{3}x^3+4a^2x\Big]_0^a \\ &= \boldsymbol{\frac{16}{3}a^3} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

　である．
(3) C_1 と ℓ の交点の x 座標は

$$5x^2=2ax+3a^2$$
$$(5x+3a)(x-a)=0$$
$$\therefore \quad x=-\frac{3}{5}a,\ a$$

であるから，C_1 と ℓ で囲まれた図形の面積を T は

$$
\begin{aligned}
T &= \int_{-\frac{3}{5}a}^{a} \left\{(2ax+3a^2)-5x^2\right\} dx \\
&= \left[ax^2+3a^2x-\frac{5}{3}x^3\right]_{-\frac{3}{5}a}^{a} \\
&= \left(a^3+3a^3-\frac{5}{3}a^3\right)-\left(\frac{9}{25}a^3-\frac{9}{5}a^3+\frac{9}{25}a^3\right) \\
&= \frac{7}{3}a^3+\frac{27}{25}a^3 \\
&= \frac{256}{75}a^3
\end{aligned}
$$

である．よって

$$
\frac{T}{S} = \left(\frac{256}{75}a^3\right)\times\left(\frac{3}{16a^3}\right) = \boldsymbol{\frac{16}{25}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
$$

である．