θ を定数とする．2 つの 2 次関数 $y=(\tan\theta)x^2$，$y=-\dfrac{1}{\tan\theta}x^2+3\tan\theta$ のグラフをそれぞれ C_1，C_2 とする．

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，C_1，C_2 の共有点の x 座標は $\pm\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である．

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，C_1，C_2 の共有点の x 座標は $\pm\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}\sin\theta$ であり，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\sin^{\boxed{\text{カ}}}\theta}{\cos\theta}$ である．

(23 金沢工大 4)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
6	2	3	4	3	2

【解答】

$$C_1: y=(\tan\theta)x^2,$$
$$C_2: y=-\frac{1}{\tan\theta}x^2+3\tan\theta$$

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき

$$C_1: y=x^2,$$
$$C_2: y=-x^2+3$$

である．C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$$x^2=-x^2+3 \qquad \therefore\quad x=\pm\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

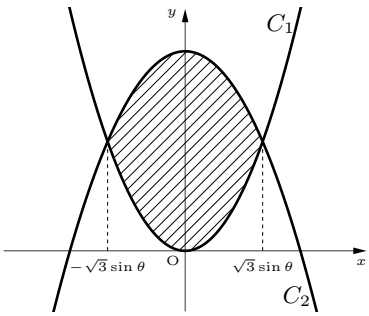
(2) C_1，C_2 の共有点の x 座標は

$$(\tan\theta)x^2=-\frac{1}{\tan\theta}x^2+3\tan\theta$$
$$\left(\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\right)x^2=3\tan\theta$$
$$\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}x^2=3\tan\theta$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\tan\theta>0$ より $\dfrac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}>0$ であるから

$$\begin{aligned}x^2&=\frac{3\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\\&=3\tan^2\theta\cos^2\theta\\&=3\sin^2\theta\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x=\pm\boldsymbol{\sqrt{3}}\sin\theta \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$



C_1, C_2 で囲まれる部分の面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \int_{-\sqrt{3}\sin\theta}^{\sqrt{3}\sin\theta} \left\{ \left(-\frac{1}{\tan\theta}x^2 + 3\tan\theta \right) - (\tan\theta)x^2 \right\} dx \\
&= -\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta} \int_{-\sqrt{3}\sin\theta}^{\sqrt{3}\sin\theta} (x+\sqrt{3}\sin\theta)(x-\sqrt{3}\sin\theta)\, dx \\
&= \frac{1+\tan^2\theta}{6\tan\theta}(\sqrt{3}\sin\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3 \\
&= \frac{1}{6\sin\theta\cos\theta}(2\sqrt{3}\sin\theta)^3 \\
&= \frac{\boldsymbol{4\sqrt{3}}\sin^{\boldsymbol{2}}\theta}{\cos\theta} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.