関数 $y=x^3$ のグラフを C とし，点 $(1,\ 1)$ における C の接線を ℓ，点 $(1,\ 1)$ を通り ℓ に垂直な直線を m とする．

(1) ℓ の方程式と m の方程式を求めよ．
(2) C と ℓ と y 軸で囲まれた図形のうち，$x \geqq 0$ の部分の面積を求めよ．
(3) C と m と y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ．

(23 金沢工大 B 4)

【答】

(1) $\ell : y=3x-2$，$m : y=-\dfrac{1}{3}x+\dfrac{4}{3}$
(2) $\dfrac{3}{4}$
(3) $\dfrac{11}{12}$

【解答】

$$C : y=x^3$$

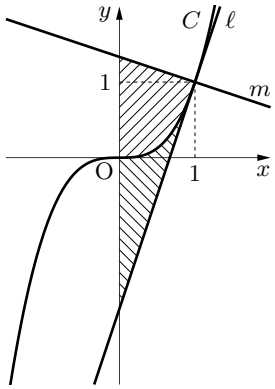
(1) $y'=3x^2$ であるから，点 $(1,\ 1)$ における接線 ℓ の方程式は

$$y-1=3(x-1)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{\ell : y=3x-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，ℓ に垂直な直線 m の方程式は

$$y-1=-\frac{1}{3}(x-1)$$
$$\therefore\ \boldsymbol{m : y=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．



(2) 求める面積は

$$\int_0^1 \{x^3-(3x-2)\}\,dx$$
$$=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\right]_0^1$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2$$
$$=\boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 求める面積は

$$\int_0^1 \left\{\left(-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}\right)-x^3\right\}dx$$
$$=\left[-\frac{x^2}{6}+\frac{4}{3}x-\frac{x^4}{4}\right]_0^1$$
$$=-\frac{1}{6}+\frac{4}{3}-\frac{1}{4}$$
$$=\boldsymbol{\frac{11}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．