2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ について，

$$f(x) = x^2 + x\int_{-1}^{1} g(t)\,dt + \int_{0}^{3} f(t)\,dt, \quad g(x) = xf(x) - 1$$

が成り立つとする．

(1) $a = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$，$b = \displaystyle\int_{0}^{3} f(t)\,dt$ とおくとき，定数 a, b の値をそれぞれ求めよ．

(2) 2 つの曲線 $y = f(x)$, $y = g(x)$ の共有点の x 座標を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}\,dx$ を求めよ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^{3} |f(x) - g(x)|\,dx$ の値を求めよ．

(23 関西学院大 社会・法)

【答】

(1) $a = -6$, $b = 9$

(2) $x = 2$, $\dfrac{5 \pm 5}{2}$

(3) $\displaystyle\int \{f(x) - g(x)\}\,dx = -\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 10x + C$ (C は積分定数)

(4) $\dfrac{125}{192}$

【解答】

$$f(x) = x^2 + x\int_{-1}^{1} g(t)\,dt + \int_{0}^{3} f(t)\,dt$$

$$g(x) = xf(x) - 1$$

(1) $a = \displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,dt$，$b = \displaystyle\int_{0}^{3} f(t)\,dt$ とおくと

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

であるから

$$\begin{aligned} a &= \int_{-1}^{1} g(t)\,dt = \int_{-1}^{1} \{tf(t) - 1\}\,dt = \int_{-1}^{1} \{t^3 + at^2 + bt - 1\}\,dt \\ &= 2\left[a \cdot \frac{t^3}{3} - t\right]_0^1 \quad (\because \text{ 奇関数・偶関数}) \\ &= \frac{2}{3}a - 2 \end{aligned}$$

式を整理すると

$$\left(1 - \frac{2}{3}\right)a = -2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a = -6}$$ ……(答)

このとき

$$\begin{aligned} b &= \int_{0}^{3} f(t)\,dt = \int_{0}^{3} (t^2 - 6t + b)\,dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} - 3t^2 + bt\right]_0^3 = 3b - 18 \end{aligned}$$

式を整理すると

$$2b = 18 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{b = 9}$$ ……(答)

である．

(2) (1) より

$$f(x) = x^2 - 6x + 9, \quad g(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

であり，2 つの曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ の共有点の x 座標は

$$x^2 - 6x + 9 = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$
$$x^3 - 7x^2 + 15x - 10 = 0$$
$$(x-2)(x^2 - 5x + 5) = 0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = 2, \ \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (1) より

$$\begin{aligned} &\int \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= \int \{-x^3 + 7x^2 - 15x + 10\}\,dx \\ &= \boldsymbol{-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 10x + C \quad (C \text{ は積分定数})} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(4) (2) より

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= -(x^3 - 7x^2 + 15x - 10) \\ &= -(x-2)\left(x - \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right) \end{aligned}$$

$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} < \dfrac{3}{2} < 2 < 3 < \dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ であるから，積分区間 $\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 3$ においては

$\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 2$ のとき　$f(x) - g(x) \leqq 0$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき　$f(x) - g(x) \geqq 0$

である．よって

$$\begin{aligned} &\int_{\frac{3}{2}}^{3} |f(x) - g(x)|\,dx \\ &= -\int_{\frac{3}{2}}^{2} \{f(x) - g(x)\}\,dx + \int_{2}^{3} \{f(x) - g(x)\}\,dx \\ &= -\Big[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 10x\Big]_{\frac{3}{2}}^{2} + \Big[-\frac{x^4}{4} + \frac{7}{3}x^3 - \frac{15}{2}x^2 + 10x\Big]_{2}^{3} \\ &= 2 \times \left(4 - \frac{56}{3} + 30 - 20\right) - \left(\frac{81}{64} - \frac{63}{8} + \frac{135}{8} - 15\right) \\ &\qquad + \left(-\frac{81}{4} + 63 - \frac{135}{2} + 30\right) \\ &= 2 \times \left(14 - \frac{56}{3}\right) - \left(\frac{657}{64} - 15\right) + \left(93 - \frac{351}{4}\right) \\ &= -\frac{28}{3} + \frac{303}{64} + \frac{21}{4} \\ &= \frac{-1792 + 909 + 1008}{64 \cdot 3} \\ &= \boldsymbol{\frac{125}{192}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．