$y = x^3 - x^2 - 2x + 1$ で表される曲線を C，$y = -x + k$ で表される直線を l とする．ただし，k は実数とする．このとき，次の問いに答えよ．

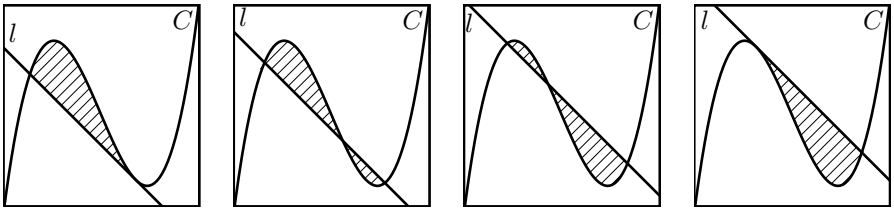
(1) $k = 1$ のとき，曲線 C と直線 l は 3 個の共有点をもつ．これらの共有点の x 座標のうち，最も小さい値を α とし，最も大きい値を β とする．このとき，$\alpha^2 + \beta^2$ と $\alpha^3 + \beta^3$ の値をそれぞれ求めよ．

(2) 曲線 C と直線 l が 2 個以上の相異なる共有点をもつように，k の値の範囲を定めよ．

(3) k の値を (2) で定めた範囲で動かすとき，曲線 C と直線 l で囲まれる部分は変化する．下の図はある 4 つの k のそれぞれの値に対して，囲まれる部分を斜線で示している．この様子を観察していた生徒が次の命題が成り立つと予想した．

「k は (2) で定めた範囲内にあるとする．このとき，曲線 C と直線 l で囲まれる部分の面積は，k の値によらず一定である.」

この命題の真偽を理由を付けて判定せよ．



(23 高知大 教育 3)

【答】

(1) $\alpha^2 + \beta^2 = 3$，$\alpha^3 + \beta^3 = 4$

(2) $0 \leqq k \leqq \dfrac{32}{27}$

(3) 偽，理由は略.

【解答】

$$C : y = x^3 - x^2 - 2x + 1,$$
$$l : y = -x + k$$

(1) $k = 1$ のとき，C と l の 3 つの共有点の x 座標は

$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = -x + 1$$
$$x^3 - x^2 - x = 0$$
$$\therefore \quad x(x^2 - x - 1) = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

の実数解である．$x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解は，解と係数の関係より (2 解の積) $= -1$ であるから，異符号である．したがって，① は 0，負，正の 3 つ解をもち，負の解が α，正の解が β であり，α, β は

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha\beta = -1 \end{cases} \qquad \cdots\cdots ②$$

を満たす．② より

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1^2 - 2 \cdot (-1) = \mathbf{3} \qquad \cdots\cdots(答)$$
$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 1^3 - 3 \cdot (-1) \cdot 1 = \mathbf{4} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) C と l が 2 個以上の相異なる共有点をもつ条件は，方程式

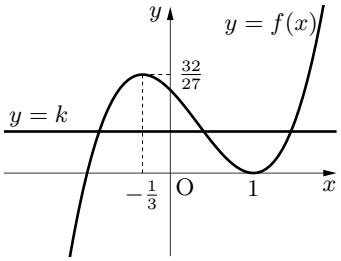
$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = -x + k$$
$$\therefore \quad x^3 - x^2 - x + 1 = k$$

が 2 個以上の相異なる実数解をもつことである．これは $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ とおくと，曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ が 2 個以上の相異なる共有点をもつことである．

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$
$$= (3x+1)(x-1)$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



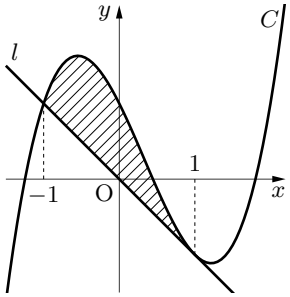
右のグラフより，k の値の範囲は

$$\boldsymbol{0 \leqq k \leqq \frac{32}{27}}$$ ……(答)

である．

(3) (2) の範囲の k，すなわち $0 \leqq k \leqq \frac{32}{27}$ の範囲の k を固定し，C と l で囲まれる部分の面積 S_k を計算してみる．

(i) $k = 0$ のとき



$$x^3 - x^2 - 2x + 1 = -x + 0$$
$$x^3 - x^2 - x + 1 = 0$$
$$(x+1)(x-1)^2 = 0$$
$$\therefore \quad x = -1,\ 1 \text{ (重解)}$$

であり

$$S_0 = \int_{-1}^{1} \{f(x) - (-x)\}\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} (x+1)(x-1)^2\,dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \{(x-1+2)(x-1)^2\}\,dx = \left[\frac{(x-1)^4}{4} + 2\frac{(x-1)^3}{3}\right]_{-1}^{1}$$
$$= -\frac{(-2)^4}{4} - 2\frac{(-2)^3}{3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

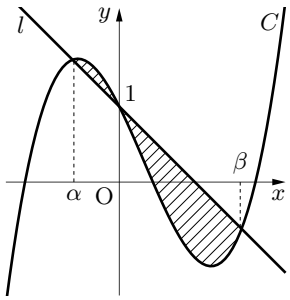
である．

- 偶関数・奇関数に着目して積分すると

$$S_0 = \int_{-1}^{1} \{f(x) - (-x)\}\,dx = \int_{-1}^{1} (x^3 - x^2 - x + 1)\,dx$$
$$= 2\int_{0}^{1} (-x^2 + 1)\,dx = 2\left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{4}{3}$$

である．

(ii) $k=1$ のとき



$$x^3-x^2-2x+1=-x+1$$
$$x^3-x^2-x=0$$
$$x(x-\alpha)(x-\beta)=0$$

であり

$$\begin{aligned}S_1&=\int_\alpha^0\{f(x)-(-x+1)\}\,dx\\&\qquad+\int_0^\beta\{(-x+1)-f(x)\}\,dx\\&=\int_\alpha^0(x^3-x^2-x)\,dx-\int_0^\beta(x^3-x^2-x)\,dx\\&=-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^\alpha-\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^\beta\\&=-\frac{\alpha^4+\beta^4}{4}+\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\end{aligned}$$

ここで，②と (1) より

$$\alpha^4+\beta^4=(\alpha^2+\beta^2)^2-2\alpha^2\beta^2=3^2-2\cdot(-1)^2=7$$

であるから

$$S_1=-\frac{7}{4}+\frac{4}{3}+\frac{3}{2}=\frac{13}{12}$$

である．

(i)(ii) から，$S_0\neq S_1$ であり，生徒が予想した命題は偽である．　　……(証明終わり)