x についての 3 次関数 $f(x)$ が条件

$$xf'(x) = 3f(x) + 2x, \quad f(1) = 1$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $g(x) = \displaystyle\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} f(t)\,dt$ を求めよ．

(3) (2) の $g(x)$ について，方程式 $g(x) = k$ の異なる実数解の個数を，定数 k の値により場合分けして答えよ．

(23 北海道教大 2)

【答】

(1) $f(x) = 2x^3 - x$

(2) $g(x) = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{8}$

(3)

k	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
x の個数	0	2	4	3	2

【解答】

$$xf'(x) = 3f(x) + 2x \qquad \cdots\cdots ①$$

$$f(1) = 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

(1) 3 次関数 $f(x)$ を $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \neq 0)$ とおくと

$$① \iff x(3ax^2 + 2bx + c) = 3(ax^3 + bx^2 + cx + d) + 2x$$

$$\therefore \quad 3ax^3 + 2bx^2 + cx = 3ax^3 + 3bx^2 + (3c+2)x + 3d$$

が成り立つ．辺々の係数を比較すると

$$\begin{cases} 2b = 3b \\ c = 3c + 2 \\ 0 = 3d \end{cases} \qquad \therefore \quad b = 0,\ c = -1,\ d = 0$$

$$\therefore \quad f(x) = ax^3 - x$$

である．ここで，$x = 1$ とおくと

$$f(1) = a - 1 \qquad \therefore \quad 1 = a - 1 \quad (\because ②) \qquad \therefore \quad a = 2$$

よって

$$\boldsymbol{f(x) = 2x^3 - x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

を得る．

(2) (1) の結果より

$$g(x) = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x} (2t^3 - t)\,dt = \left[\frac{t^4}{2} - \frac{t^2}{2}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{x}$$

$$= \frac{1}{2}(x^4 - x^2) - \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{x^4}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{8}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

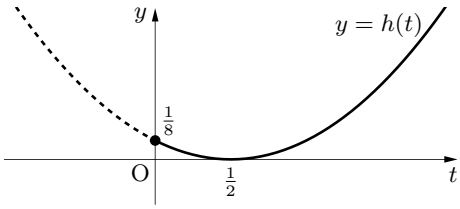
(3) $$g(x) = k \qquad \cdots\cdots (*)$$

$x^2 = t$ とおくと

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2$$

となる．$h(t) = \dfrac{1}{2}\left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2$ とおくと，

$y = h(t)$ のグラフは右図となる．



$h(t) = k$ を満たす t $(\geqq 0)$ に対して

$t = 0$ のとき，x は 1 個
$t > 0$ のとき，x は 2 個

存在することに注意すると，$(*)$ を満たす実数解 x の個数は

k	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{8}$	$\cdots$
t $(\geqq 0)$ の個数	0	1	2	2 (1 つは $t = 0$)	1
x の個数	0	2	4	3	2

$\cdots\cdots$(答)

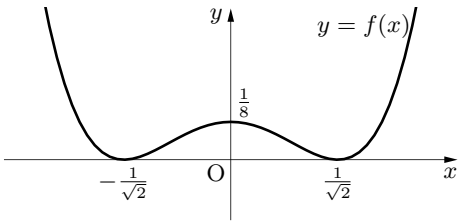
である．

- $y = g(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点を調べてもよい．$g(x)$ は偶関数であるから，グラフは y 軸に関して対称である．$x \geqq 0$ について増減を調べる．

$$g'(x) = 2x^3 - x = x(2x^2 - 1)$$

より，$g(x)$ の増減表は下表になり，実数全体における $y = f(x)$ のグラフは右のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	0	$\nearrow$



直線 $y = k$ との共有点を考えると，$f(x) = k$ の実数解の個数は

$k < 0$ のとき 0 個，
$k = 0$ のとき 2 個，
$0 < k < \dfrac{1}{8}$ のとき 4 個，
$k = \dfrac{1}{8}$ のとき 3 個，
$k > \dfrac{1}{8}$ のとき 2 個

である．