n を自然数とする．

(1) すべての自然数 n に対して，

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{2}$$

となることを，数学的帰納法によって示せ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n$ を求めよ．

(23 室蘭工大 3)

【答】

(1) 略

(2) 0

【解答】

(1) すべての自然数 n に対して，不等式

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n \geqq 1+\frac{n}{2} \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\left(\frac{3}{2}\right)^1-\left(1+\frac{1}{2}\right)=0$$

であり，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}&\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}-\left(1+\frac{k+1}{2}\right)\\&=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k-\frac{k+3}{2}\\&\geqq\frac{3}{2}\left(1+\frac{k}{2}\right)-\frac{k+3}{2}\quad(\because\ \text{帰納法の仮定})\\&=\frac{k}{4}\\&>0\end{aligned}$$

であり，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ が成り立つ．

(2) (1) より

$$0<\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{2}{n+2}$$

が成り立つ．よって

$$0<\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqq \frac{2\sqrt{n}}{n+2}$$

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}}=0$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\left(\frac{2}{3}\right)^n=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．