$r \fallingdotseq -1$ のとき，数列 $\left\{\dfrac{r^n+3}{r^n+2}\right\}$ の極限を調べよ．ただし，n は正の整数である．

(23 日本福祉大)

【答】 $\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3}{r^n+2}=\begin{cases}\dfrac{3}{2} & (|r|<1 \text{ のとき}) \\ 1 & (|r|>1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{4}{3} & (r=1 \text{ のとき})\end{cases}$

【解答】

r の値で場合分けする．

(i) $|r|<1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3}{r^n+2}=\frac{0+3}{0+2}=\frac{3}{2}$$

(ii) $|r|>1$ のとき

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3}{r^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{3}{r^n}}{1+\dfrac{2}{r^n}}=\frac{1+0}{1+0}=1$$

(iii) $r=1$ のとき

$$\frac{r^n+3}{r^n+2}=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$$

(i)，(ii)，(iii) より

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{r^n+3}{r^n+2}=\begin{cases}\dfrac{3}{2} & (|r|<1 \text{ のとき}) \\ 1 & (|r|>1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{4}{3} & (r=1 \text{ のとき})\end{cases}}$$ ……(答)

である．

- $r=-1$ のとき

(ア) n が奇数のとき

$$\frac{r^n+3}{r^n+2}=\frac{-1+3}{-1+2}=2$$

(イ) n が偶数のとき

$$\frac{r^n+3}{r^n+2}=\frac{1+3}{1+2}=\frac{4}{3}$$

数列 $\left\{\dfrac{r^n+3}{r^n+2}\right\}$ は 2, $\dfrac{4}{3}$ を振動するから，極限は存在しない．