無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n$ が収束するような x の値の範囲は $\boxed{(5)}$ であり，この無限級数の和が 2 のとき，x の値は $\boxed{(6)}$ である．

(23 福岡大 医 1(3))

【答】

(5)	(6)
$\dfrac{-6-\sqrt{3}}{3} < x < -\dfrac{7}{3}$ または $-\dfrac{5}{3} < x < \dfrac{-6+\sqrt{3}}{3}$	$x = \dfrac{-18 \pm 2\sqrt{6}}{9}$

【解答】

$$\sum_{n=1}^{\infty}(9x^2+36x+34)^n \qquad \cdots\cdots ①$$

① は，初項と公比がともに $9x^2+36x+34$ の無限等比級数であるから，収束する条件は

$$-1 < 9x^2+36x+34 < 1 \qquad \cdots\cdots ②$$

$$\iff \begin{cases} 9x^2+36x+35 > 0 \\ 9x^2+36x+33 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (3x+7)(3x+5) > 0 \\ 3x^2+12x+11 < 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < -\dfrac{7}{3} \text{ または } -\dfrac{5}{3} < x \\ \dfrac{-6-\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{-6+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\frac{-6-\sqrt{3}}{3} < x < -\frac{7}{3}} \text{ または } \boldsymbol{-\frac{5}{3} < x < \frac{-6+\sqrt{3}}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

① の和が存在するとき，その和は $\dfrac{9x^2+36x+34}{1-(9x^2+36x+34)}$ であり，和が 2 となる x の値は

$$\frac{9x^2+36x+34}{1-(9x^2+36x+34)} = 2$$

$$9x^2+36x+34 = 2-2(9x^2+36x+34)$$

$$\therefore \quad 9x^2+36x+34 = \frac{2}{3} \quad (② \text{ を満たす})$$

$$9x^2+36x+\frac{100}{3} = 0$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{-18 \pm 2\sqrt{6}}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．