数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする．この数列 $\{a_n\}$ が，すべての自然数 n に対して

$$S_n = \frac{8 - a_n}{3}$$

を満たすとき，以下の問いに答えよ．

ア．a_1 を求めよ．
イ．数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．
ウ．極限 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．
エ．$S_n > 2.65$ となる最小の自然数 n を求めよ．

(23 豊橋技科大 1(1))

【答】
ア．$a_1 = 2$
イ．$a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$
ウ．$\frac{8}{3}$
エ．$n = 4$

【解答】

$$S_n = \frac{8 - a_n}{3} \quad (n \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

ア．① において $n = 1$ とおく．$S_1 = a_1$ であるから

$$a_1 = \frac{8 - a_1}{3}$$

$$3a_1 = 8 - a_1 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{a_1 = 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．
イ．$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= \frac{8 - a_n}{3} - \frac{8 - a_{n-1}}{3} \\ &= \frac{a_{n-1} - a_n}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad 3a_n = a_{n-1} - a_n \qquad \therefore \quad a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}$$

である．$\{a_n\}$ は初項 $a_1 = 2$，公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから

$$\boldsymbol{a_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．
ウ．イ．より

$$S_n = \frac{1}{3}\left\{8 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\} = \frac{8}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

であるから

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{\frac{8}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

エ．$S_n > 2.65$ を整理すると

$$\frac{8}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} > 2 + \frac{65}{100}$$
$$\frac{2}{3} - \frac{13}{20} > \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$
$$\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{60} > \frac{1}{4^{n-1}}$$
$$\therefore \quad 4^{n-1} > 40$$

となる．$4^2 = 16,\ 4^3 = 64$ であるから，$S_n > 2.65$ を満たす最小の自然数は

$$n - 1 = 3 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{n = 4}$$ ……（答）

である．