初項が a_1 の等差数列 $\{a_n\}$ は，すべての項が正の実数で，次の条件をみたすとする．

$$a_1 \cdot a_2 = 45, \quad a_2 \cdot a_3 = 105$$

n を正の整数とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を求めよ．

(2) $T_n = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot a_{k+1})$ を n を用いて表せ．

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ とする．極限値 $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{nS_n}$ を求めよ．

(4) $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k \cdot a_{k+1}}$ を n を用いて表せ．

(5) 極限値 $\lim_{n\to\infty} U_n$ を求めよ．

(23 電気通信大 4)

【答】

(1) $a_n = \sqrt{3}(2n+1)$

(2) $T_n = 4n^3 + 18n^2 + 23n$

(3) $\lim_{n\to\infty} \frac{T_n}{nS_n} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

(4) $U_n = \frac{n}{9(2n+3)}$

(5) $\lim_{n\to\infty} U_n = \frac{1}{18}$

【解答】

$$(*) \begin{cases} a_1 \cdot a_2 = 45 \\ a_2 \cdot a_3 = 105 \end{cases}$$

(1) 初項を a，公差を d とおくと，$(*)$ は

$$\begin{cases} a(a+d) = 45 \\ (a+d)(a+2d) = 105 \end{cases} \iff \begin{cases} d = \frac{45}{a} - a & \cdots\cdots ① \\ \frac{45}{a}\left(\frac{90}{a} - a\right) = 105 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

② を解くと

$$9(90 - a^2) = 21a^2 \qquad \therefore \quad 30a^2 = 9 \cdot 90$$

すべての項は正の実数なので

$$a = 3\sqrt{3}$$

であり，① に代入すると

$$d = \frac{45}{3\sqrt{3}} - 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

である．よって，一般項 a_n は

$$a_n = 3\sqrt{3} + (n-1)2\sqrt{3} = \boldsymbol{\sqrt{3}(2n+1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (1) の結果を $T_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k \cdot a_{k+1})$ に代入すると

$$\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n}\{\sqrt{3}(2k+1)\cdot\sqrt{3}(2k+3)\} \\
&= 3\sum_{k=1}^{n}(4k^2+8k+3) \\
&= 3\left\{4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+3n\right\} \\
&= 2(2n^3+3n^2+n)+12(n^2+n)+9n \\
&= \boldsymbol{4n^3+18n^2+23n}
\end{aligned}$$

……(答)

である.

(3) (1) の結果を $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ に代入すると

$$\begin{aligned}
S_n &= \sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}(2k+1) \\
&= \sqrt{3}\cdot\frac{n\{3+(2n+1)\}}{2} \\
&= \sqrt{3}n(n+2)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{nS_n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{4n^3+18n^2+23n}{\sqrt{3}n^2(n+2)} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{4+\dfrac{18}{n}+\dfrac{23}{n^2}}{\sqrt{3}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{3}}
\end{aligned}$$

……(答)

である.

(4) (1) の結果を $U_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{a_k\cdot a_{k+1}}$ に代入すると

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(2k+1)\cdot\sqrt{3}(2k+3)}\right\} \\
&= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+3}\right) \\
&= \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2n+3}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{n}{9(2n+3)}}
\end{aligned}$$

……(答)

である.

(5) (4) の結果より

$$\lim_{n\to\infty}U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{9\left(2+\dfrac{3}{n}\right)} = \boldsymbol{\frac{1}{18}}$$

……(答)

である.