平面上に，同一直線上にない 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(s,\ t)$，B$(v,\ w)$ がある．点 P_n，Q_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を以下のように定める．線分 OA の中点を P_1，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{B}$ を $2:1$ に内分する点を Q_1，線分 OQ_1 の中点を P_2，線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{B}$ を $2:1$ に内分する点を Q_2 とする．同様に，$n=3,\ 4,\ \cdots$ に対して，線分 OQ_{n-1} の中点を P_n，線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{B}$ を $2:1$ に内分する点を Q_n とする．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．
(2) 点 P_n の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする．$x_n,\ y_n$ を $s,\ t,\ v,\ w,\ n$ を用いて表せ．
(3) S_n を $\triangle\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n$ の面積とする．$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(23 愛知県立大 情報科学 2)

【答】

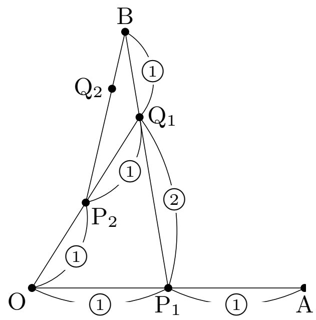
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2) $x_n=\dfrac{2}{5}v+\dfrac{5s-4v}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$，　$y_n=\dfrac{2}{5}w+\dfrac{5t-4w}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}$

(3) $\dfrac{1}{5}|sw-tv|$

【解答】

(1) P_{n+1} は線分 OQ_n の中点であり，Q_n は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{B}$ を $2:1$ に内分する点であるから



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}&=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}\ \cdots\cdots ①\quad\cdots\cdots(答)$$

である．

(2) ① は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$

と変形することができる．

$\left\{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}$ は初項 $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，公比 $\dfrac{1}{6}$ のベクトルの列であるから

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\
\therefore\quad&\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\\
\therefore\quad&(x_n,\ y_n)=\frac{2}{5}(v,\ w)+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{2}(s,\ t)-\frac{2}{5}(v,\ w)\right)
\end{aligned}
$$

である．よって

$$\begin{cases}\boldsymbol{x_n=\dfrac{2}{5}v+\dfrac{5s-4v}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}}\\[2ex]\boldsymbol{y_n=\dfrac{2}{5}w+\dfrac{5t-4w}{10}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}}\end{cases}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) (2) より

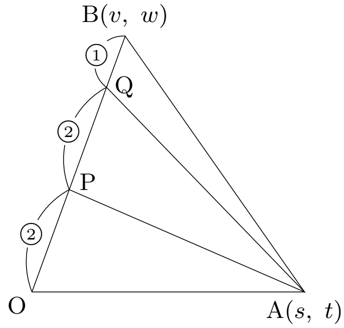
$$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}(v,\ w)$$

また

$$\lim_{n\to\infty}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{4}{5}(v,\ w)$$

である．

$\mathrm{P}\left(\frac{2}{5}v,\ \frac{2}{5}w\right)$，$\mathrm{Q}\left(\frac{4}{5}v,\ \frac{4}{5}w\right)$ とおくと，P，Q は線分 OB 上に右図のように並ぶ．よって



$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}(\triangle\mathrm{AP}_n\mathrm{Q}_n\text{の面積})\\&=(\triangle\mathrm{APQ}\text{ の面積})\\&=\frac{2}{5}(\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積})\\&=\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}|sw-tv|\\&=\boldsymbol{\frac{1}{5}|sw-tv|}\end{aligned}$$

……(答)

である．