以下の極限値を求めよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to -\pi}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}$

(3) $\displaystyle\lim_{x\to\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}$

(5) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin x-\cos^2 x+1}{x^3(x-\pi)}$

(23 岩手大 理工 2)

【答】

(1) $-\dfrac{1}{\pi}$
(2) 1
(3) 0
(4) 2
(5) 0

【解答】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ であるから

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+\dfrac{\sin x}{x}}{x-\pi}=\frac{0+1}{0-\pi}=\boldsymbol{-\frac{1}{\pi}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) x を $-\pi$ に近づけると

$$\lim_{x\to -\pi}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}=\frac{2\pi^2+0}{\pi^2+\pi^2}=\mathbf{1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $-1\leqq\sin x\leqq 1$ であり，$x\to\infty$ のとき $x\neq 0$ としてよいから

$$-\frac{1}{x^2}\leqq\frac{\sin x}{x^2}\leqq\frac{1}{x^2}$$

である．

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

であるから，はさみうちの原理により

$$\lim_{x\to\to\infty}\frac{\sin x}{x^2}=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 式を変形すると

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\sin x}{x^2}}{1-\dfrac{\pi}{x}}=\frac{2+0}{1-0}\quad(\because\ (3))$$

$$=\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) 式を変形すると

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin x-\cos^2 x+1}{x^3(x-\pi)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin x+\sin^2 x}{x^3(x-\pi)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{2x^2+\sin x}{x^2-\pi x}\right)\\ &= 0\cdot 2 \quad (\because\ (3),\ (4))\\ &= \mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

- (2)，(3) を用いずに直接求めることもできる．

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin x-\cos^2 x+1}{x^3(x-\pi)}\\ =&\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2\sin x+\sin^2 x}{x^3(x-\pi)}\\ =&\lim_{x\to\infty}\left\{\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{2}{x-\pi}+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{x(x-\pi)}\right\}\\ =&\ 1\cdot 0+1^2\cdot 0\\ =&\ 0\end{aligned}$$

である．