自然対数の底 e は $\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$ で定義される．極限値 $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x$ を求めよ．

(23 電気通信大 後 情報理工 5(1)(i))

【答】 $\frac{1}{\sqrt{e}}$

【解答】

$-\frac{1}{2x} = h$ とおくと

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^x &= \lim_{h\to 0}(1+h)^{-\frac{1}{2h}}\\ &= \lim_{h\to 0}\{(1+h)^{\frac{1}{h}}\}^{-\frac{1}{2}}\\ &= e^{-\frac{1}{2}} \quad (\because\ e \text{ の定義})\\ &= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{e}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．