実数 x に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1 & (x\text{ が無理数のとき})\\ -1 & (x\text{ が有理数のとき})\end{cases}$$

と定める．また，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=[\sqrt{2}\times 10^n]\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

とおく．ただし，$[t]$ はガウス記号であり，実数 t に対し $t-1<[t]\leqq t$ を満たす整数とする．さらに，$\sqrt{2}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい．このとき，次の問いに答えよ．

(1) a_1 の値を求めよ．

(2) 自然数 n に対して，$0,\ \dfrac{1}{10^n},\ \sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}$ の間の大小関係を求めよ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a_n}{10^n}\right)$ の値をそれぞれ求めよ．さらに，次の (カ)，(キ) のうちから正しいものを 1 つ選べ．

(カ) $f(x)$ は $x=\sqrt{2}$ で連続である

(キ) $f(x)$ は $x=\sqrt{2}$ で連続でない

(4) 自然数 n に対して，

$$S_n=\sum_{k=0}^{2\times 10^n-1}\max\left\{f(x)\,\middle|\,\frac{k}{10^n}\leqq x\leqq\frac{k+1}{10^n}\right\}\times\frac{1}{10^n},$$

$$s_n=\sum_{k=0}^{2\times 10^n-1}\min\left\{f(x)\,\middle|\,\frac{k}{10^n}\leqq x\leqq\frac{k+1}{10^n}\right\}\times\frac{1}{10^n}$$

とする．ただし，$a<b$ を満たす実数 $a,\ b$ に対し，$\max\{f(x)\mid a\leqq x\leqq b\}$ は閉区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の最大値を表し，$\min\{f(x)\mid a\leqq x\leqq b\}$ は閉区間 $[a,\ b]$ における $f(x)$ の最小値を表す．このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ と極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ をそれぞれ求めよ．

(23 九州歯大 歯 3)

【答】

(1) $a=1=14$

(2) $0<\sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}<\dfrac{1}{10^n}$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}=\sqrt{2}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a_n}{10^n}\right)=-1$，(キ)

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=2$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n=-2$

【解答】

$$a_n=[\sqrt{2}\times 10^n]\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

ガウス記号 $[t]$ は $t-1<[t]\leqq t$ を満たす整数，すなわち，t を超えない最大の整数である．

(1) a_n の定義より

$$a_1=\left[\sqrt{2}\times 10^1\right]=\left[\sqrt{200}\right]$$

$14=\sqrt{196}$，$15=\sqrt{225}$ なので，$14<\sqrt{200}<15$ であり

$$\boldsymbol{a_1=14}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}$ について調べる．

$a_n=\left[\sqrt{2}\times 10^n\right]$ より

$$\sqrt{2}\times 10^n-1<a_n\leqq\sqrt{2}\times 10^n$$
$$\sqrt{2}-\frac{1}{10^n}<\frac{a_n}{10^n}\leqq\sqrt{2}$$
$$\therefore\quad 0\leqq\sqrt{2}-\frac{a_n}{10^n}<\frac{1}{10^n}$$

ここで，a_n は整数であるから，$\dfrac{a_n}{10^n}$ は有理数である．$\sqrt{2}$ は無理数なので $\sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}$ は無理数であるから，$\sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}\neq 0$ であり

$$\boldsymbol{0<\sqrt{2}-\frac{a_n}{10^n}<\frac{1}{10^n}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

が成り立つ．

(3) (2) の不等式において，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10^n}=0$ なので，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{2}-\frac{a_n}{10^n}\right)=0\qquad\therefore\quad\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{10^n}=\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．また．$\dfrac{a_n}{10^n}$ は有理数であるから $f\left(\dfrac{a_n}{10^n}\right)=-1$ であり

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a_n}{10^n}\right)}=\lim_{n\to\infty}(-1)=\boldsymbol{-1}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

次に，$f(x)$ の $x=\sqrt{2}$ における連続性について考える．

無理数の値をとりながら $\sqrt{2}$ に収束する数列の一つとして数列 $\left\{\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}\right\}$ をとると，$f\left(\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}\right)=1$ であるから，$x=\sqrt{2}+\dfrac{1}{n}$ のとき

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\sqrt{2}+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}1=1$$

また，数列 $\left\{\dfrac{a_n}{10^n}\right\}$ は有理数の値をとりながら $\sqrt{2}$ に収束する数列であり，$x=\dfrac{a_n}{10^n}$ のとき

$$\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)=\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{a_n}{10^n}\right)=-1\quad(\because\ (3)\text{ の前半の結論})$$

となる．x がどのように $\sqrt{2}$ に近づくかにより，$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)$ の値が異なるから，$\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}}f(x)$ は存在しない．よって

$f(x)$ は$\sqrt{2}$で連続でない（キ）． ……(答)

(4) (2) の不等式 $0<\sqrt{2}-\dfrac{a_n}{10^n}<\dfrac{1}{10^n}$ の各辺に $\dfrac{k}{10^n}$ (k は 0 以上の整数) を加えると

$$\frac{k}{10^n}<\sqrt{2}-\frac{a_n-k}{10^n}<\frac{k+1}{10^n}$$

ここで，$\sqrt{2}-\dfrac{a_n-k}{10^n}$ は無理数である．また，$\dfrac{k}{10^n}$，$\dfrac{k+1}{10^n}$ は有理数であるから

$$\frac{1}{2}\left(\frac{k}{10^n}+\frac{k+1}{10^n}\right)$$

は閉区間 $\left[\dfrac{k}{10^n},\dfrac{k+1}{10^n}\right]$ 内の有理数である．したがって，閉区間 $\left[\dfrac{k}{10^n},\dfrac{k+1}{10^n}\right]$ には，無理数も有理数も存在するから

$$\max\left\{f(x)\,\middle|\,\frac{k}{10^n}\leqq x\leqq\frac{k+1}{10^n}\right\}=1$$
$$\min\left\{f(x)\,\middle|\,\frac{k}{10^n}\leqq x\leqq\frac{k+1}{10^n}\right\}=-1$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{S_n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{2\times 10^n - 1} \max \left\{ f(x) \,\middle|\, \frac{k}{10^n} \leqq x \leqq \frac{k+1}{10^n} \right) \times \frac{1}{10^n} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2\times 10^n - 1} \left(1 \times \frac{1}{10^n} \right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2\times 10^n}{10^n} \\
&= \mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．同様にして

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{s_n} &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2\times 10^n - 1} \left\{ (-1) \times \frac{1}{10^n} \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{-(2\times 10^n)}{10^n} \\
&= \mathbf{-2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．