関数 $f(x)=\sin(\lambda x)$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数を $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)$ と書く．例えば，第 1 次導関数は $f'(x)=\dfrac{d^1}{dx^1}f(x)$ である．λ を正の定数として，以下の問いに答えなさい．

(1) 数学的帰納法により 1 以上のすべての整数 n について $\dfrac{d^n}{dx^n}f(x)=\lambda^n f\left(x+\dfrac{n\pi}{2\lambda}\right)$ が成り立つことを証明しなさい．

(2) $g(x)=\cos(\lambda x)$ とする．$\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=A(x)f(B(x))$ を満たす $A(x)=a_1x+a_0$ と $B(x)=b_1x+b_0$ の係数 $a_1,\ a_0,\ b_1,\ b_0$ を求めなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(3) 関数 $g(x)$ を前問と同様に定める．次の**命題**において，$\boxed{\ *\ }$ に当てはまるものを (ア)〜(エ) の選択肢から選び，その理由を説明しなさい．

命題：$0<\lambda<1$ であることは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ が収束するための $\boxed{\ *\ }$．

(ア) 必要条件であるが十分条件ではない
(イ) 十分条件であるが必要条件ではない
(ウ) 必要十分条件である
(エ) 必要条件でも十分条件でもない

(23 公立千歳科技大 中期 理工 3)

【答】

(1) 略

(2) $a_1=0,\ a_0=2^{n-1}\lambda^n,\ b_1=2,\ b_0=\dfrac{n\pi}{2\lambda}$

(3) (ア) 理由は略

【解答】

$$f(x)=\sin(\lambda x)$$

(1) 1 以上のすべての整数 n について

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\lambda^n f\left(x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right) \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{d^1}{dx^1}f(x)&=f'(x)=\cos(\lambda x)\cdot(\lambda x)'\\&=\lambda\sin\left(\lambda x+\frac{\pi}{2}\right)\\&=\lambda\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{\pi}{2\lambda}\right)\right\}\\&=\lambda f\left(x+\frac{\pi}{2\lambda}\right)\end{aligned}$$

$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}f(x) &= \frac{d}{dx}\left\{\frac{d^k}{dx^k}f(x)\right\} \\
&= \frac{d}{dx}\left\{\lambda^k f\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\} \quad (\because \ \text{帰納法の仮定}) \\
&= \lambda^k \frac{d}{dx}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\} \\
&= \lambda^k \cos\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)\right\}\cdot\lambda \\
&= \lambda^{k+1}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{k\pi}{2\lambda}\right)+\frac{\pi}{2}\right\} \\
&= \lambda^{k+1}\sin\left\{\lambda\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2\lambda}\right)\right\} \\
&= \lambda^{k+1} f\left(x+\frac{(k+1)\pi}{2\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

(i)，(ii) より，1 以上のすべての整数 n について $(*)$ は成り立つ．　　……(証明終わり)

(2) $g(x)=\cos(\lambda x)$ のとき

$$f(x)g(x)=\sin(\lambda x)\cos(\lambda x)=\frac{1}{2}\sin(2\lambda x)$$

である．(1) の結果を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} &= \frac{1}{2}\frac{d^n}{dx^n}\sin(2\lambda x)=\frac{1}{2}\cdot(2\lambda)^n f\left(x+\frac{n\pi}{2\cdot(2\lambda)}\right) \\
&= 2^{n-1}\lambda^n\sin\left\{(2\lambda)\left(x+\frac{n\pi}{2\cdot(2\lambda)}\right)\right\} \\
&= 2^{n-1}\lambda^n\sin\left\{\lambda\left(2x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right)\right\} \\
&= (0\cdot x+2^{n-1}\lambda^n)f\left(2x+\frac{n\pi}{2\lambda}\right)
\end{aligned}
$$

であり

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=A(x)f(B(x))=(a_1x+a_0)f(b_1x+b_0)$$

を満たす a_1，a_0，b_1，b_0 は

$$\boldsymbol{a_1=0,\ a_0=2^{n-1}\lambda^n,\ b_1=2,\ b_0=\frac{n\pi}{2\lambda}} \qquad \text{……(答)}$$

である．

(3) (2) より

$$
\begin{aligned}
\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\} &= 2^{n-1}\lambda^n\sin\left(2\lambda x+\frac{n\pi}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(2\lambda)^n\sin\left(2\lambda x+\frac{n\pi}{2}\right) \quad (n \geqq 1)
\end{aligned}
$$

である．

「$0<\lambda<1 \ \overset{\times}{\underset{\circ}{\rightleftarrows}}\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ が収束する」を示す．

(i) $\longrightarrow$ の反例

$\lambda=\dfrac{1}{2}$ のとき，$0<\lambda<1$ であるが

$$\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}=\frac{1}{2}\cdot 1^n\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$$

であり，$\dfrac{1}{2}\cos x$，$-\dfrac{1}{2}\sin x$，$-\dfrac{1}{2}\cos x$，$\dfrac{1}{2}\sin x$ を繰り返すから，$\left\{\dfrac{1}{2}\sin\left(x+\dfrac{n\pi}{2}\right)\right\}$ は収束しない．

(ii) $\longleftarrow$ の証明

λ が正の定数であることに注意すると，対偶は

「$\lambda \geqq 1$ ならば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ が収束しない」

となる．これは命題「$\longleftarrow$」と同値である．

$\lambda \geqq 1$ ならば $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}(2\lambda)^n=\infty$ であり，$\sin\left(2\lambda x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ は $\cos(2\lambda x)$，$-\sin(2\lambda x)$，$-\cos(2\lambda x)$，$\sin(2\lambda x)$ を繰り返すから，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ は収束しない．よって，命題「$\longleftarrow$」は正しい．

以上，(i)，(ii) より $0<\lambda<1$ であることは $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{d^n}{dx^n}\{f(x)g(x)\}$ が収束するための

必要条件であるが十分条件ではない．(ア) ……(答)