関数 $f(x)=\dfrac{3x\cdot\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}$ を微分せよ．

(23 北海学園大 工 3(2))

【答】 $f'(x)=\dfrac{(4-9x)\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}$

【解答】

$$f(x)=\frac{3x\cdot\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}=3x^{\frac{4}{3}}e^{-3x}$$

積の微分法，合成関数の微分法により

$$\begin{aligned}f'(x)&=3\left\{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\cdot e^{-3x}+x^{\frac{4}{3}}\cdot e^{-3x}(-3)\right\}\\&=\left(4x^{\frac{1}{3}}-9x^{\frac{4}{3}}\right)e^{-3x}\\&=\boldsymbol{\frac{(4-9x)\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 対数微分法を用いる．

  $x\fallingdotseq 0$ のとき，$f(x)\fallingdotseq 0$ であるから

  $$\log|f(x)|=\log 3+\log|x|+\frac{1}{3}\log|x|-3x$$

  辺々を x で微分すると

  $$\frac{1}{f(x)}f'(x)=0+\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x}-3$$

  $$\therefore\quad f'(x)=\frac{3x\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}\cdot\frac{3+1-9x}{3x}=\frac{(4-9x)\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}\qquad\cdots\cdots ㋐$$

  $x=0$ のとき，$f'(0)$ は

  $$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{3h\cdot\sqrt[3]{h}}{e^{3h}}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3\cdot\sqrt[3]{h}}{e^{3h}}=0$$

  $$\therefore\quad f'(0)=0$$

  ㋐ において，$x=0$ とおくと $f'(0)=0$ を得るから，$x=0$ のときも含めて

  $$f'(x)=\frac{(4-9x)\sqrt[3]{x}}{e^{3x}}$$

  である．