$g(x) = |x|\sqrt{x^2+1}$ とする．$g(x)$ が $x=0$ で微分可能でないことを証明しなさい．

(23 慶應大 理工 1(2))

【答】 略

【解答】

$$g(x) = |x|\sqrt{x^2+1}$$

$g(x)$ が $x=0$ で微分可能でないということは，微分係数 $g'(0) = \lim_{h\to 0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$ が存在しないということである．

$$\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \frac{|h|\sqrt{h^2+1}-0}{h} = \frac{|h|\sqrt{h^2+1}}{h}$$

であるから

$$\lim_{h\to +0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to +0}\frac{h\sqrt{h^2+1}}{h} = \lim_{h\to +0}\sqrt{h^2+1} = 1$$

$$\lim_{h\to -0}\frac{g(0+h)-g(0)}{h} = \lim_{h\to -0}\frac{-h\sqrt{h^2+1}}{h} = \lim_{h\to -0}(-\sqrt{h^2+1}) = -1$$

2 つの極限が異なるので，$\lim_{h\to 0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$ は存在しない．よって，$g(x)$ は $x=0$ で微分可能でない．

…… (証明終わり)