$a,\ b,\ c$ を実数の定数とし，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+3x-a\cos 2x}{4x} & (x>0)\\ bx+c & (x\leqq 0)\end{cases}$$

で定める．$f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとき

$$a=\boxed{\text{ア}},\quad b=\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad c=\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$$

である．

(23 明治大 理工 1(1))

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ
1	1	2	3	4

【解答】

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+3x-a\cos 2x}{4x} & (x>0)\\ bx+c & (x\leqq 0)\end{cases}$$

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能ならば，$f(x)$ は $x=0$ で連続である．すなわち

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)\qquad\cdots\cdots(*)$$

が成り立つ．

$$\lim_{x\to -0}f(x)=\lim_{x\to -0}(bx+c)=c\qquad\cdots\cdots ①$$

$$\lim_{x\to +0}f(x)=\lim_{x\to +0}\frac{1+3x-a\cos 2x}{4x}\qquad\cdots\cdots ②$$

$$f(0)=b\cdot 0+c=c\qquad\cdots\cdots ③$$

$\displaystyle\lim_{x\to +0}f(x)=f(0)$ において，$x\longrightarrow +0$ のとき (左辺の分母) $\longrightarrow 0$ かつ $f(0)$ は有限確定値であるから，(左辺の分子) $\longrightarrow 0$ が必要である．すなわち

$$\lim_{x\to +0}\{1+3x-a\cos 2x\}=0$$

$$\therefore\quad 1+0-a\cdot 1=0\qquad\therefore\quad a=1$$

である．このとき

$$\begin{aligned}\lim_{x\to +0}f(x)&=\lim_{x\to +0}\frac{1+3x-1\cdot\cos 2x}{4x}\\&=\lim_{x\to +0}\frac{3x+2\sin^2 x}{4x}\\&=\lim_{x\to +0}\left(\frac{3}{4}+\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{\sin x}{x}\right)\\&=\frac{3}{4}+0\cdot 1\\&=\frac{3}{4}\ (\text{有限確定値})\end{aligned}$$

であり，十分である．このとき

$$(*)\iff c=\frac{3}{4}$$

である．

$x=0$ で微分可能であるから，$a=1$，$c=\dfrac{3}{4}$ が成り立ち，さらに

$$\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\qquad\cdots\cdots\ (**)$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{3x+2\sin^2 x}{4x}-\dfrac{3}{4}}{x}\\&=\lim_{x\to+0}\frac{\sin^2 x}{2x^2}=\frac{1}{2}\lim_{x\to+0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\\\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x}&=\lim_{x\to-0}\frac{\left(bx+\dfrac{3}{4}\right)-\dfrac{3}{4}}{x}=\lim_{x\to-0}b=b\end{aligned}$$

であるから

$$(**)\iff\frac{1}{2}=b$$

である．以上より

$$\boldsymbol{a=1,\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{3}{4}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．