n は自然数とする．関数 $f(x)=x^2e^{2x}$ の n 次導関数 $f^{(n)}(x)$ について次の等式が成り立つことを証明せよ．

$$f^{(n)}(x)=2^{n-2}(4x^2+4nx+n(n-1))e^{2x}$$

(23 津田塾大 学芸 1(2))

【答】 略

【解答】

$$f(x)=x^2e^{2x}$$

すべての自然数 n に対して

$$f^{(n)}(x)=2^{n-2}(4x^2+4nx+n(n-1))e^{2x} \qquad \cdots\cdots (*)$$

が成り立つことを数学的帰納法で証明する．

(i) $n=1$ のとき

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= f'(x) \\ &= 2x\cdot e^{2x}+x^2\cdot(e^{2x}\cdot 2) \\ &= (2x^2+2x)e^{2x} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

一方，$(*)$ で $n=1$ とおくと

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x) &= 2^{-1}(4x^2+4x)e^{2x} \\ &= (2x^2+2x)e^{2x} \qquad \cdots\cdots ② \end{aligned}$$

①, ② より，$n=1$ のとき $(*)$ は成り立つ．

(ii) $n=k$ (k は自然数) のとき，$(*)$ が成り立つと仮定すると

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)}(x))' \\ &= \{2^{k-2}(4x^2+4kx+k(k-1))e^{2x}\}' \quad (\because \text{ 帰納法の仮定}) \\ &= 2^{k-2}\{(8x+4k)\cdot e^{2x}+(4x^2+4kx+k(k-1))\cdot(e^{2x}\cdot 2)\} \\ &= 2^{k-2}\cdot 2\{(4x+2k)+(4x^2+4kx+k(k-1))\}e^{2x} \\ &= 2^{k-1}\{4x^2+4(k+1)x+(k+1)k\}e^{2x} \end{aligned}$$

であるから，$n=k+1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

以上 (i)，(ii) より，すべての自然数 n に対して $(*)$ は成り立つ．　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)