関数 $f(x)=e^{\sqrt{3}x}\cos 3x$ の第 50 次導関数を $f^{(50)}(x)$ とする．三角関数の合成を考えることにより，方程式 $f^{(50)}(x)=0$ の $0 \leqq x \leqq 2\pi$ における解をすべて求めよ．

(23 福島県医大 医 1(4))

【答】 $x=\dfrac{5\pi}{18},\ \dfrac{11\pi}{18},\ \dfrac{17\pi}{18},\ \dfrac{23\pi}{18},\ \dfrac{29\pi}{18},\ \dfrac{35\pi}{18}$

【解答】

$$f(x)=e^{\sqrt{3}x}\cos 3x$$

順次微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\cdot\cos 3x+e^{\sqrt{3}x}\cdot(-3\sin 3x)\\
&=e^{\sqrt{3}x}(\sqrt{3}\cos 3x-3\sin 3x)\\
&=2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\left(\cos 3x\cdot\frac{1}{2}-\sin 3x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&=2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots ①
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f''(x)&=2\sqrt{3}\left\{e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}'\\
&=2\sqrt{3}\left\{\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\cdot\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+e^{\sqrt{3}x}\cdot(-3)\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\right\}\\
&=2\sqrt{3}\cdot(2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x}\left\{\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&=2\sqrt{3}\cdot\left\{2\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right\}\\
&=(2\sqrt{3})^2e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{2\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

となる．これらから，$f(x)$ を順次微分するということは，$\cos\theta$ を $\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ とし，式を $2\sqrt{3}$ 倍することと推測される．すなわち，任意の自然数 n に対し

$$f^{(n)}(x)=(2\sqrt{3})^ne^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{n\pi}{3}\right) \qquad \cdots\cdots (*)$$

となることが推測される．$(*)$ を数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，① であり，$(*)$ は成り立つ．
(ii) $n=k$ での成立を仮定すると

$$\begin{aligned}
&f^{(k+1)}(x)\\
&=\left\{(2\sqrt{3})^ke^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{k\pi}{3}\right)\right\}'\\
&=(2\sqrt{3})^k\left\{\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x}\cdot\cos\left(3x+\frac{k\pi}{3}\right)+e^{\sqrt{3}x}\cdot(-3)\sin\left(3x+\frac{k\pi}{3}\right)\right\}\\
&=(2\sqrt{3})^k\cdot(2\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x}\left\{\cos\left(3x+\frac{k\pi}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}-\sin\left(3x+\frac{k\pi}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\\
&=(2\sqrt{3})^{k+1}e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{k}{3}\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\
&=(2\sqrt{3})^{k+1}e^{\sqrt{3}x}\cos\left(3x+\frac{k+1}{3}\pi\right)
\end{aligned}$$

となり，この推測 $(*)$ は正しい．

したがって

$$\begin{aligned} f^{(50)}(x) &= (2\sqrt{3})^{50} e^{\sqrt{3}x} \cos\left(3x + \frac{50\pi}{3}\right) \\ &= (2\sqrt{3})^{50} e^{\sqrt{3}x} \cos\left(3x + \frac{2\pi}{3}\right) \quad \left(\because\ \frac{50\pi}{3} = 16\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

であり，$f^{(50)}(x) = 0$ となるのは，k を整数として

$$3x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \qquad \therefore \quad x = \frac{(6k-1)\pi}{18}$$

のときである．ここで，$0 \leqq x \leqq 2\pi$ であるから

$$0 \leqq \frac{(6k-1)\pi}{18} \leqq 2\pi \qquad \therefore \quad 1 \leqq 6k \leqq 37$$

k は整数であるから

$$1 \leqq k \leqq 6$$

である．求める解のすべては

$$\boldsymbol{x = \frac{5\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}, \frac{17\pi}{18}, \frac{23\pi}{18}, \frac{29\pi}{18}, \frac{35\pi}{18}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

の 6 個である．