$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において，曲線 C_1，C_2 が媒介変数 θ を用いて，それぞれ

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

と表される．

曲線 C_1 上の $\theta = \alpha$ に対応する点を点 $\mathrm{A}(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha,\ \sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$ とし，点 A における C_1 の接線を l，点 A における C_1 の法線を m とするとき，次の問いに答えよ．

(1) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，接線 l の方程式を求めよ．

(2) $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，法線 m の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C_2 上の $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(4) α の値に関わらず，法線 m は常に曲線 C_2 に接することを示し，m と C_2 の接点の座標を求めよ．

(23 岩手大 理工 5)

【答】

(1) $l : y = x - \dfrac{\sqrt{2}}{4}\pi$

(2) $m : y = -x + \sqrt{2}$

(3) $y = -x + \sqrt{2}$

(4) 証明略．接点の座標は $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$

【解答】

$$C_1 : \begin{cases} x = \cos\theta + \theta\sin\theta \\ y = \sin\theta - \theta\cos\theta \end{cases} \qquad C_2 : \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}$$

(1) C_1 について

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin\theta + 1\cdot\sin\theta + \theta\cos\theta = \theta\cos\theta,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos\theta - 1\cdot\cos\theta + \theta\sin\theta = \theta\sin\theta$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{dy}{d\theta}}{\dfrac{dx}{d\theta}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

である．したがって，$\theta = \alpha$ に対応する点 A における C_1 の接線の方程式は

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\{x - (\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)\} + (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

$$y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \sin\alpha - \alpha\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} + (\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$$

$$\therefore \quad y = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}x - \frac{\alpha}{\cos\alpha}$$

である．よって，$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ のときの接線 l の方程式は

$$\boldsymbol{y = x - \frac{\sqrt{2}}{4}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\theta=\alpha$ に対応する点 A における C_1 の法線 m の方程式は

$$y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\{x-(\cos\alpha+\alpha\sin\alpha)\}+(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$$

$$y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x+\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}+\alpha\cos\alpha+(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)$$

$$\therefore\quad y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x+\frac{1}{\sin\alpha}\qquad\cdots\cdots ①$$

である．よって，$\alpha=\dfrac{\pi}{4}$ のときの法線 m の方程式は

$$\boldsymbol{y=-x+\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 曲線 C_2 は原点 O を中心とする円 $x^2+y^2=1$ であり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ に対応する点 $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ における C_2 の接線の方程式は

$$\frac{\sqrt{2}}{2}x+\frac{\sqrt{2}}{2}y=1$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-x+\sqrt{2}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(4) $\theta=\alpha$ に対応する点 $(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ における曲線 C_2 の接線の方程式は

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha=1$$

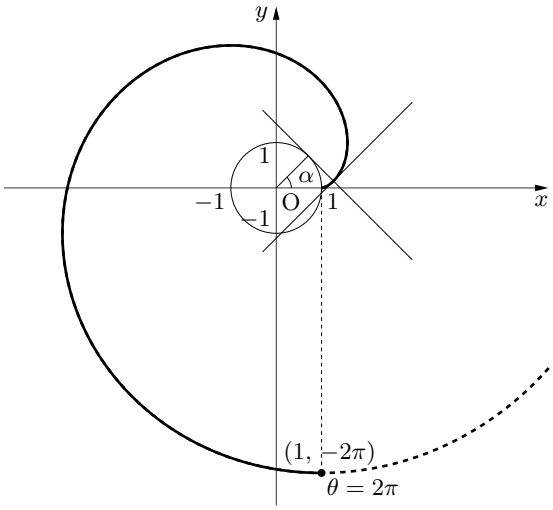
$$\therefore\quad y=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}x+\frac{1}{\sin\alpha}$$

であり，① と一致する．

よって，α の値に関わらず C_1 の法線 m は常に曲線 C_2 に接する．　……(証明終わり)

また，m と C_2 の接点の座標は

$$\boldsymbol{(\cos\alpha,\ \sin\alpha)}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- C_1 は円 C_2 の伸開線 (インボリュート) と呼ばれている曲線で，円周に巻かれた糸を張りながらほどいていくときの糸の端点がえがく曲線になっている．