直線 $y=4x+k$ が曲線 $y=\tan x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に接するとき，定数 k の値を求めよ．

(23 東京都市大 情報工・建築・理工 2(2))

【答】 $\sqrt{3}-\dfrac{4}{3}\pi$

【解答】

$$y=\tan x\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

より，曲線 ① 上の点 $(\alpha,\ \tan\alpha)$ における接線の方程式は

$$y=\frac{1}{\cos^2\alpha}(x-\alpha)+\tan\alpha$$

$$\therefore\quad y=\frac{1}{\cos^2\alpha}x-\frac{\alpha}{\cos^2\alpha}+\tan\alpha$$

であり，これが直線 $y=4x+k$ と一致するから

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=4\\ -\dfrac{\alpha}{\cos^2\alpha}+\tan\alpha=k\end{cases}\iff\begin{cases}\cos^2\alpha=\dfrac{1}{4}\\ k=-4\alpha+\tan\alpha\end{cases}$$

である．ここで，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より第 1 式は

$$\cos\alpha=\frac{1}{2}\qquad\therefore\quad\alpha=\frac{\pi}{3}$$

よって

$$k=-4\cdot\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{3}=\boldsymbol{\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- 直線 $y=4x+k$ の傾きは 4 であるから

  $$y'=4\iff\frac{1}{\cos^2 x}=4$$

  を満たす x を $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で求めると $x=\dfrac{\pi}{3}$ であり，接点の座標 $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \tan\dfrac{\pi}{3}\right)$，すなわち $\left(\dfrac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right)$ を得る．これより

  $$k=\sqrt{3}-4\cdot\frac{\pi}{3}$$

  である．