媒介変数 $t$ を用いて，

$$x=\frac{4}{\sqrt{t^2+16}},\quad y=\frac{t}{\sqrt{t^2+16}}$$

で表される曲線について，点 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ における接線の方程式を求めなさい．

(23 福島大 共生システム理工 2(4))

---

【答】 $y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}$

---

【解答】

$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ をみたす $t$ の値は

$$\begin{cases}\dfrac{4}{\sqrt{t^2+16}}=\dfrac{4}{5}\\[2ex] \dfrac{t}{\sqrt{t^2+16}}=\dfrac{3}{5}\end{cases}\iff\begin{cases}\sqrt{t^2+16}=5\\ \dfrac{t}{5}=\dfrac{3}{5}\end{cases}\qquad\therefore\quad t=3$$

である．

$$\frac{dx}{dt}=\frac{-4\cdot\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+16}}}{t^2+16}=\frac{-4t}{(t^2+16)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1\cdot\sqrt{t^2+16}-t\cdot\dfrac{2t}{2\sqrt{t^2+16}}}{t^2+16}=\frac{16}{(t^2+16)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\dfrac{dy}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{16}{-4t}=-\frac{4}{t}$$

である．$t=3$ のとき，$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{3}$ であるから，求める接線の方程式は

$$y=-\frac{4}{3}\left(x-\frac{4}{5}\right)+\frac{3}{5}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3}}$$ ……(答)

である．

- $x=\frac{4}{\sqrt{t^2+16}}$，$y=\frac{t}{\sqrt{t^2+16}}$ なので

$$x^2+y^2=\frac{16}{t^2+16}+\frac{t^2}{t^2+16}=1$$

よって，この曲線は単位円 $x^2+y^2=1$ の一部である．円の接線の公式より，点 $\left(\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y=1$$

である．