関数 $f(x)=\dfrac{x^3+18x^2-2x-4}{x+2}$ の極値をすべて求めよ．

(23 岩手大 教育 5(2))

【答】 極小値 $f(0)=-2$

【解答】

$$f(x)=\frac{x^3+18x^2-2x-4}{x+2}$$

微分すると

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{(3x^2+36x-2)(x+2)-(x^3+18x^2-2x-4)\cdot 1}{(x+2)^2}\\
&=\frac{(3x^3+42x^2+70x-4)-(x^3+18x^2-2x-4)}{(x+2)^2}\\
&=\frac{2x^3+24x^2+72x}{(x+2)^2}\\
&=\frac{2x(x^2+12x+36)}{(x+2)^2}\\
&=\frac{2x(x+6)^2}{(x+2)^2}
\end{aligned}$$

$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-6	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ の極値は

$x=0$ における **極小値 $\boldsymbol{f(0)=-2}$** ……(答)

のみである．