

関数 $y = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3}$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べて，そのグラフをかけ。

(23 弘前大 教育・医・理工 4(1))

【答】 略

【解答】

$$f(x) = \frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} \text{ とおく.}$$

$$f'(x) = -\frac{3}{x^2} + \frac{3}{x^4} = \frac{-3x^2 + 3}{x^4} = \frac{3(1-x)(1+x)}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{6}{x^3} - \frac{12}{x^5} = \frac{6x^2 - 12}{x^5} = \frac{6(x^2 - 2)}{x^5}$$

であり， $f(x)$ の増減と凹凸は下表となる．

x	...	$-\sqrt{2}$...	-1	...	0	...	1	...	$\sqrt{2}$...
$f'(x)$	-		-	0	+	/	+	0	-		-
$f''(x)$	-	0	+		+	/	-		-	0	-
$f(x)$		↘		↘		↗		↗		↘	

$$\text{極大値：} f(1) = 3 - 1 = 2, \quad \dots\dots(\text{答})$$

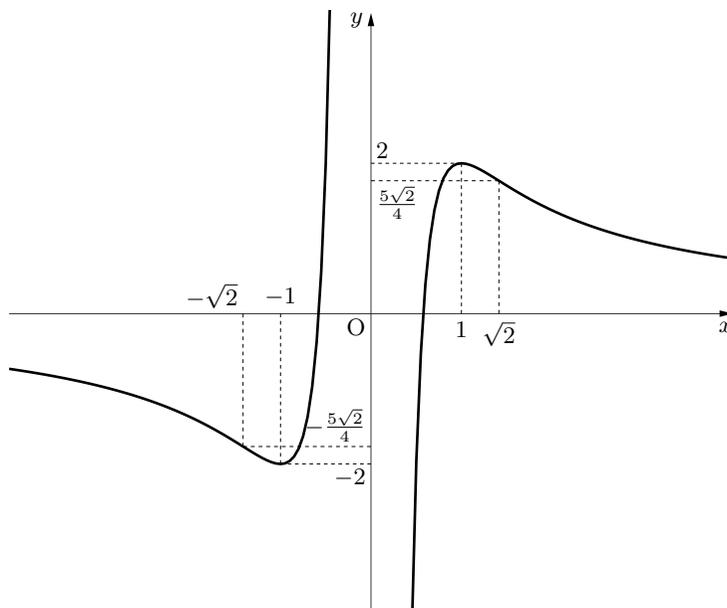
$$\text{極小値：} f(-1) = -3 + 1 = -2, \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\text{変曲点：} \left(-\sqrt{2}, -\frac{5\sqrt{2}}{4}\right), \left(\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{2}}{4}\right) \quad \dots\dots(\text{答})$$

であり， $y = f(x)$ が原点对称であることと

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$$

をあわせるとグラフの概形は下図のようになる．



- $f(x)$ は奇関数であり， $y = f(x)$ のグラフは原点に関して対称なので，増減，凹凸は $x > 0$ の範囲で調べればよい．