2 つの実数 $a,\ b$ は $0<b<a$ を満たすとする．関数

$$f(x)=\frac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})$$

の最大値を $M(a,\ b)$，最大値をとるときの x の値を $X(a,\ b)$ と表す．ここで，e は自然対数の底である．

(1) $X(a,\ b)$ を求めよ．

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)$ を求めよ．

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{b\to+0}M(a,\ b)$ を求めよ．

(23 千葉大 4)

【答】

(1) $X(a,\ \ b)=\dfrac{1}{b}\log\dfrac{a}{a-b}$

(2) $\displaystyle\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\frac{1}{a}$

(3) $\displaystyle\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\frac{1}{ae}$

【解答】

$$f(x)=\frac{1}{b}(e^{-(a-b)x}-e^{-ax})\quad(0<b<a)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{1}{b}\{-(a-b)e^{-(a-b)x}+ae^{-ax}\}\\&=\frac{e^{-ax}}{b}\{a-(a-b)e^{bx}\}\end{aligned}$$

$f'(x)$ の符号は $a-(a-b)e^{bx}$ の符号と一致する．符号の変わり目は

$$e^{bx}=\frac{a}{a-b}\qquad\therefore\quad bx=\log\frac{a}{a-b}\quad\text{すなわち}\quad x=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$$

であり，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

よって，最大値をとるときの x の値 $X(a,\ b)$ は

$$\boldsymbol{X(a,\ b)=\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}}$$ ……(答)

である．

(2)
$$\begin{aligned}\lim_{b\to+0}X(a,\ b)&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{1}{1-\frac{b}{a}}\\&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)\log\left(1-\frac{b}{a}\right)\\&=\frac{1}{a}\lim_{b\to+0}\log\left(1-\frac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}\end{aligned}$$

e の定義 $\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ により

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}$$ ……(答)

である．

- $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{\log(1+h)}{h}=1$ より

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=\lim_{b\to+0}\frac{1}{a}\left(-\frac{a}{b}\right)\log\left(1-\frac{b}{a}\right)=\frac{1}{a}\lim_{b\to+0}\frac{\log\left(1-\dfrac{b}{a}\right)}{-\dfrac{b}{a}}=\frac{1}{a}$$

としてもよい．

- $$\begin{aligned}\lim_{b\to+0}X(a,\ b)&=\lim_{b\to+0}\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}=\lim_{b\to+0}\frac{\log a-\log(a-b)}{b}\\&=\lim_{b\to+0}\frac{\log(a-b)-\log a}{-b}\end{aligned}$$

  $g(x)=\log x$ とおくと

$$\lim_{b\to+0}X(a,\ b)=g'(a)=\boldsymbol{\frac{1}{a}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $M(a,\ b)$ は $f(x)$ の最大値であるから

$$\begin{aligned}M(a,\ b)&=f\left(\frac{1}{b}\log\frac{a}{a-b}\right)=\frac{1}{b}\left\{e^{-\frac{a-b}{b}\log\frac{a}{a-b}}-e^{-\frac{a}{b}\log\frac{a}{a-b}}\right\}\\&=\frac{1}{b}\left\{\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a-b}{b}}-\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}}\right\}\\&=\frac{1}{b}\left(\frac{a}{a-b}-1\right)\left(\frac{a}{a-b}\right)^{-\frac{a}{b}}\\&=\frac{1}{a-b}\cdot\frac{1}{\left(1-\dfrac{b}{a}\right)^{-\frac{a}{b}}}\end{aligned}$$

e の定義 $\displaystyle\lim_{h\to0}(1+h)^{\frac{1}{h}}=e$ により

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{e}=\boldsymbol{\frac{1}{ae}}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

- (2) の利用を考えると見通しがよくなる．$X=X(a,\ b)$ とおくと

$$\begin{aligned}M(a,\ b)&=f(X)=\frac{1}{b}(e^{-(a-b)X}-e^{-aX})=\frac{e^{-aX}}{b}(e^{bX}-1)\\&=e^{-aX}\cdot\frac{(e^{bX}-1)}{bX}\cdot X\end{aligned}$$

  (2) の結果と e の定義 $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{e^h-1}{h}=1$ により

$$\lim_{b\to+0}M(a,\ b)=e^{-a\cdot\frac{1}{a}}\cdot1\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{ae}$$

  である．