関数 $f(x)$ と実数 t に対し，x の関数 $tx-f(x)$ の最大値があればそれを $g(t)$ と書く．

(1) $f(x)=x^4$ のとき，任意の実数 t について $g(t)$ が存在する．この $g(t)$ を求めよ．

以下，関数 $f(x)$ は連続な導関数 $f'(x)$ を持ち，次の 2 つの条件 (i)，(ii) が成り立つものとする．

(i) $f'(x)$ は増加関数，すなわち $a<b$ ならば $f'(a)<f'(b)$

(ii) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$

(2) 任意の実数 t に対して，x の関数 $tx-f(x)$ は最大値 $g(t)$ を持つことを示せ．

(3) s を実数とする．t が実数全体を動くとき，t の関数 $st-g(t)$ の最大値は $f(s)$ となることを示せ．

(23 千葉大 9)

【答】

(1) $3\left(\dfrac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

(1) $f(x)=x^4$ のとき，x の関数 $tx-f(x)=tx-x^4$ であり，これを x で微分すると

$$(tx-x^4)'=t-4x^3$$

である．$(tx-x^4)'$ は単調減少であり，$(tx-x^4)'$ の符号は $x=\left(\dfrac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で正から負にかわるから，$tx-x^4$ は任意の実数 t に対して $x=\left(\dfrac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$ で極大かつ最大となる．

$tx-f(x)$ の最大値 $g(t)$ は

$$g(t)=t\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}-\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{3t}{4}\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{1}{3}}=\boldsymbol{3\left(\frac{t}{4}\right)^{\frac{4}{3}}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) x の関数 $tx-f(x)$ を x で微分すると

$$(tx-f(x))'=t-f'(x)$$

である．条件 (i)，(ii) より

$$\text{連続な導関数 } f'(x) \text{ は単調増加であり } \lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty \text{ かつ } \lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty \quad \cdots\cdots (*)$$

であるから

$$t-f'(x) \text{ は連続で単調減少であり } \lim_{x\to-\infty}\{t-f'(x)\}=\infty \text{ かつ } \lim_{x\to\infty}\{t-f'(x)\}=-\infty$$

である．したがって，$t-f'(x)=0$ となる x がただ一つ存在する．この x を $\alpha(t)$ とおくと，$x=\alpha(t)$ で $t-f'(x)$ の符号は正から負にかわり，$tx-f(x)$ は $x=\alpha(t)$ で極大かつ最大となる．すなわち，任意の実数 t に対して x の関数 $tx-f(x)$ は最大値 $g(t)\ (=t\alpha(t)-f(\alpha(t)))$ を持つ．

……(証明終わり)

(3) 任意の実数 t に対して，(2) と同じく $t - f'(x) = 0$ を満たす値 x を $\alpha(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} st - g(t) &= st - (t\alpha(t) - f(\alpha(t))) \\ &= \{s - \alpha(t)\}t + f(\alpha(t)) \\ &= \{s - \alpha(t)\}f'(\alpha(t)) + f(\alpha(t)) \end{aligned}$$

である．

(i) $s - \alpha(t) = 0$ のとき

$$st - g(t) = 0 \cdot f'(s) + f(s) = f(s)$$

である．

(ii) $s - \alpha(t) \fallingdotseq 0$ のとき

平均値の定理より

$$\frac{f(s) - f(\alpha(t))}{s - \alpha(t)} = f'(c)$$

を満たす実数 c (c は s と$\alpha(t)$ の間の値) が存在する．

$$\begin{aligned} & f(s) - f(\alpha(t)) = f'(c)(s - \alpha(t)) \\ \therefore \quad & f(\alpha(t)) = f(s) - f'(c)(s - \alpha(t)) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} st - g(t) &= (s - \alpha(t))f'(\alpha(t)) + f(s) - f'(c)(s - \alpha(t)) \\ &= (s - \alpha(t))\{f'(\alpha(t)) - f'(c)\} + f(s) \end{aligned}$$

$f'(x)$ は増加関数であるから

$s < \alpha(t)$ のとき，$s < c < \alpha(t)$ であるから，$f'(c) < f'(\alpha(t))$

$s > \alpha(t)$ のとき，$s > c > \alpha(t)$ であるから，$f'(c) > f'(\alpha(t))$

であり，いずれのときも $s - \alpha(t)$ と $f'(\alpha(t)) - f'(c)$ は異符号であり

$$\begin{aligned} & (s - \alpha(t))\{f'(\alpha(t)) - f'(c)\} < 0 \\ \therefore \quad & st - g(t) < f(s) \end{aligned}$$

である．

以上 (i)(ii) より，$st - g(t)$ は $s = \alpha(t)$ となる t において最大値 $f(s)$ をとる．

$\cdots\cdots$ (証明終わり)