$a<0,\ b>0$ とする．2 つの曲線 $C: y=\dfrac{1}{x^2+1}$ と $D: y=ax^2+b$ がある．いま，$x>0$ で C と D が共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする．その共有点の x 座標を t とし，D と x 軸で囲まれた部分の面積を S とする．以下の問いに答えよ．

(1) D と x 軸の交点の x 座標を $\pm p$ とし，$p>0$ とする．S を a と p を用いて表せ．
(2) $a,\ b$ を t を用いて表せ．
(3) S を t を用いて表せ．
(4) $t>0$ の範囲で，S が最大となるような D の方程式を求めよ．

(23 岡山大 理系 2)

【答】

(1) $S=-\dfrac{4}{3}ap^3$

(2) $a=-\dfrac{1}{(t^2+1)^2}$，$b=\dfrac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}$

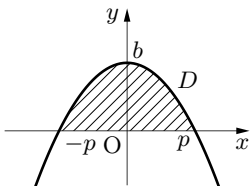
(3) $S=\dfrac{4(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3(t^2+1)^2}$

(4) $y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{3}{4}$

【解答】

$$C: y=\frac{1}{x^2+1}$$
$$D: y=ax^2+b \quad (a<0,\ b>0)$$

(1) D は上に凸な放物線であり，D と x 軸の交点の x 座標が $\pm p\ (p>0)$ であるから，D と x 軸で囲まれた部分の面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_{-p}^{p} a(x+p)(x-p)\,dx \\ &= -a\cdot\frac{\{p-(-p)\}^3}{6} \\ &= \boldsymbol{-\frac{4}{3}ap^3} \end{aligned}$$
……(答)

である．

(2) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$，$g(x)=ax^2+b$ とおくと

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x^2+1)^2},\quad g'(x)=2ax$$

である．$x>0$ で C と D が共有点をもち，その点における 2 つの曲線の接線が一致している．共有点の x 座標が t のとき

$$\begin{cases} f(t)=g(t) \\ f'(t)=g'(t) \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{1}{t^2+1}=at^2+b & \cdots\cdots ① \\ \dfrac{-2t}{(t^2+1)^2}=2at & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$t\neq 0$ であり，②より

$$\boldsymbol{a=-\frac{1}{(t^2+1)^2}}$$
……(答)

このとき，①より

$$\boldsymbol{b} = \frac{1}{t^2+1} + \frac{t^2}{(t^2+1)^2} = \boldsymbol{\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) p は $ax^2+b=0$ $(a \neq 0)$ の解であるから

$$p^2 = -\frac{b}{a} = -\frac{2t^2+1}{(t^2+1)^2} \cdot \{-(t^2+1)^2\} = 2t^2+1$$

(1) より

$$S = -\frac{4}{3}ap^3 = -\frac{4}{3} \times \frac{-1}{(t^2+1)^2} \times (2t^2+1)^{\frac{3}{2}} = \boldsymbol{\frac{4(2t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3(t^2+1)^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $u = t^2$ とおき

$$S(u) = \frac{4(2u+1)^{\frac{3}{2}}}{3(u+1)^2} \quad (u > 0)$$

が最小となる a，b を求める．$S(u)$ を u で微分すると

$$\begin{aligned} S'(u) &= \frac{4}{3} \cdot \frac{\frac{3}{2}(2u+1)^{\frac{1}{2}}2 \cdot (u+1)^2 - (2u+1)^{\frac{3}{2}} \cdot 2(u+1)}{(u+1)^4} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{3(2u+1)^{\frac{1}{2}}(u+1) - 2(2u+1)^{\frac{3}{2}}}{(u+1)^3} \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{(2u+1)^{\frac{1}{2}}(-u+1)}{(u+1)^3} \end{aligned}$$

$u > 0$ における $S(u)$ の増減は右のようになる．

u	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
$S'(u)$		$+$	0	$-$
$S(u)$		$\nearrow$		$\searrow$

S は $u=1$ で極大かつ最大となる．このとき，(2) より

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = \frac{3}{4}$$

よって，求める D の方程式は

$$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．