

関数  $f(x) = \frac{x+2}{ax^2+1}$  は  $x=1$  で極値をとる. 定数  $a$  の値および  $f(x)$  の最大値と最小値を求めよ.

(23 岩手大 後 理工 1(1))

【答】  $a = \frac{1}{5}$ , 最大値  $\frac{5}{2}$ , 最小値  $-\frac{1}{2}$

【解答】

$$f(x) = \frac{x+2}{ax^2+1}$$

$f(x)$  は  $x=1$  で極値をとるから,  $f'(x)$  は  $x=1$  で符号を変える.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (ax^2+1) - (x+2) \cdot 2ax}{(ax^2+1)^2} = \frac{-ax^2 - 4ax + 1}{(ax^2+1)^2}$$

$f'(1) = 0$  が必要であり

$$-a - 4a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{5}$$

である. このとき

$$f(x) = \frac{5(x+2)}{x^2+5},$$

$$f'(x) = \frac{5\{1 \cdot (x^2+5) - (x+2) \cdot 2x\}}{(x^2+5)^2} = \frac{-5(x^2+4x-5)}{(x^2+5)^2} = \frac{-5(x+5)(x-1)}{(x^2+5)^2}$$

$f(x)$  の増減は下表となる.

|         |            |    |            |   |            |
|---------|------------|----|------------|---|------------|
| $x$     | ...        | -5 | ...        | 1 | ...        |
| $f'(x)$ | -          | 0  | +          | 0 | -          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |    | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |

$x=1$  で極値となるから, 十分. よって

$$a = \frac{1}{5} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である. また

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{5\left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x + \frac{5}{x}} = 0$$

であるから,  $f(x)$  は

$$\text{最大値: } f(1) = \frac{5 \cdot 3}{6} = \frac{5}{2}, \quad \dots\dots(\text{答})$$

$$\text{最小値: } f(-5) = \frac{5 \cdot (-3)}{30} = -\frac{1}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

をとる.