a>0 とする.座標平面で関数  $y=\frac{1}{x^a}$  のグラフ上の点  $(1,\ 1)$  における接線が x 軸と交わる点を A, y 軸と交わる点を B とし,原点を O とする.三角形 OAB の面積を S(a) とする.次の問い答えよ.

- (1) S(a) 求めよ.
- (2) S(a) の最小値とそのときの a の値を求めよ.

(23 琉球大 工・医・理・教育 1)

## 【答】

(1) 
$$S(a) = \frac{(a+1)^2}{2a}$$

(2) a=1 のとき, 最小値 2

## 【解答】

(1) 
$$y = x^{-a}$$
$$y' = -ax^{-a-1}$$

より、曲線  $y=x^{-a}$  上の点 (1, 1) における接線の方程式は

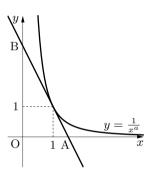
$$y = -a(x-1) + 1$$

であり、x軸、y軸との交点 A、B の座標は

$$A\left(\frac{1}{a} + 1, 0\right), B(0, a + 1)$$

である. よって, △OAB の面積は

$$S(a) = \frac{1}{2} OA \cdot OB$$
$$= \frac{(a+1)^2}{2a}$$



……(答)

である.

(2) S(a) を微分すると

$$S'(a) = \frac{1}{2} \frac{2(a+1)a - (a+1)^2}{a^2}$$
$$= \frac{1}{2} \frac{(a+1)(a-1)}{a^2}$$

であり、a > 0 における S(a) の増減は下表となる.

| a     | (0) |   | 1 |   |
|-------|-----|---|---|---|
| S'(a) |     | _ | 0 | + |
| S(a)  |     | _ |   | 1 |

よって、S(a) は

$$a=1$$
 のとき,最小値  $S(1)=2$  ……(答)

をとる.