媒介変数 t $(0 \leqq t < 2\pi)$ を用いて，

$$x = \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right), \quad y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

で表される曲線について，以下の問いに答えなさい．

(1) $t = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ のときの曲線上の点の座標をそれぞれ求めなさい．

(2) 原点から曲線上の点 $(x,\ y)$ までの距離 L を $\cos t$ を用いて表しなさい．

(3) 点 $(x,\ y)$ が曲線上を動くとき，(2) で定めた距離 L が最大になる点と最小になる点の座標をそれぞれすべて求めなさい．

(23 福島大 後 共生システム理工 3)

【答】

(1) 順に $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$, $\left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$

(2) $L = \sqrt{\cos^2 t + \frac{1}{2}}$

(3) 最大となる点の座標は $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

最小となる点の座標は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

【解答】

$$\begin{cases} x = \cos\left(t + \frac{\pi}{6}\right) \\ y = \cos\left(t - \frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \quad (0 \leqq t < 2\pi)$$

(1) 各 t に対する $x,\ y$ の値は

$$\begin{aligned}
&t = 0 \text{ のとき}, && x = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, && y = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&t = \frac{\pi}{6} \text{ のとき}, && x = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, && y = \cos 0 = 1 \\
&t = \frac{\pi}{3} \text{ のとき}, && x = \cos\frac{\pi}{2} = 0, && y = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\
&t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき}, && x = \cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, && y = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

であるから，$t = 0,\ \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2}$ のときの点の座標はそれぞれ

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 原点から曲線上の点 $(x,\ y)$ までの距離 L は

$$\begin{aligned}
L &= \sqrt{\cos^2\left(t + \frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(t - \frac{\pi}{6}\right)} \\
&= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t\right)^2} \quad (\because \text{ 加法定理}) \\
&= \sqrt{2 \cdot \frac{3}{4}\cos^2 t + 2 \cdot \frac{1}{4}\sin^2 t} \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}(1 - \cos^2 t)} \\
&= \boldsymbol{\sqrt{\cos^2 t + \frac{1}{2}}} \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) (2) の結果と t の動く範囲が $0 \leqq t < 2\pi$ であることより

L が最大となるのは，$\cos t = \pm 1$，すなわち，$t = 0,\ \pi$ のときである．

$t = 0$ のときの座標は (1) で計算済み．

$t = \pi$ のとき，$x = \cos\dfrac{7\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$y = \cos\dfrac{5\pi}{6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

である．よって，L が最大となる点の座標は

$$\boldsymbol{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right),\ \left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

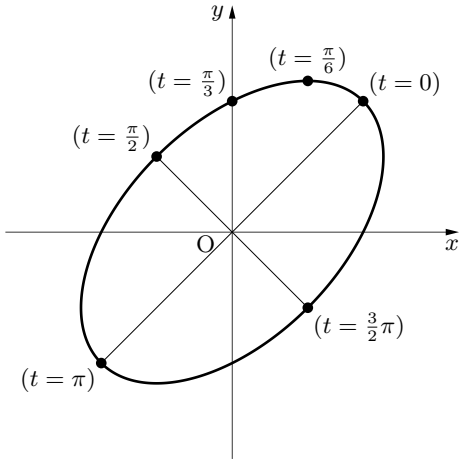
L が最小になるのは，$\cos t = 0$，すなわち，$t = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のときである．

$t = \dfrac{\pi}{2}$ のときの座標は (1) で計算済み．

$t = \dfrac{3}{2}\pi$ のとき，$x = \cos\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$，$y = \cos\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{1}{2}$

である．よって，最小になる点の座標は

$$\boldsymbol{\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 与えられた曲線を図示すると下図となる．