閉区間 $\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ を定義域とする関数 $y = \log\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$ の値域は

$$\boxed{（き）} \leqq y \leqq \boxed{（く）}$$

である．

(23 茨城大 後 工 1(4))

【答】

（き）	（く）
$\log\dfrac{3}{10}$	$-\log 2$

【解答】

$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ なので，$x \neq 0$ であり

$$y = \log\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = \log\frac{1}{x+\dfrac{1}{x}}$$

と変形できる．$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$，$g(x) = \dfrac{1}{x}$，$h(x) = \log x$ とおくと

$$y = h(g(f(x)))$$

である．

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 3$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\frac{5}{2}$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$\frac{10}{3}$

$$\therefore \quad 2 \leqq f(x) \leqq \frac{10}{3}$$

$g(x)$ は単調減少な関数であるから

$$g(2) \geqq g(f(x)) \geqq g\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} \geqq g(f(x)) \geqq \frac{3}{10}$$

さらに，$h(x)$ は単調増加な関数であるから

$$h\left(\frac{3}{10}\right) \leqq h(g(f(x))) \leqq h\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \log\frac{3}{10} \leqq h(g(f(x))) \leqq \log\frac{1}{2}$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{\log\frac{3}{10} \leqq y \leqq -\log 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．