

実数 a を定数とする. 方程式 $ax^2 = e^x$ の異なる実数解の個数を求めなさい. 解答欄には途中の計算過程も書きなさい. ただし, e は自然対数の底である. また, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$ は証明せずに用いてよい.

(23 公立千歳科技大 中期 理工 2)

【答】

a	...	0	...	$\frac{e^2}{4}$...
個数	0	0	1	2	3

【解答】

(右辺) $= e^x \neq 0$ より, (左辺) $\neq 0$ であり $x^2 \neq 0$ である. したがって

$$ax^2 = e^x \iff \frac{e^x}{x^2} = a$$

であり, 方程式 $ax^2 = e^x$ の異なる実数解の個数は曲線 $y = \frac{e^x}{x^2}$ のグラフと直線 $y = a$ のグラフの共有点の個数と一致する.

$f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ とおく.

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot x^2 - e^x \cdot 2x}{x^4} = \frac{(x-2)e^x}{x^3}$$

$f(x)$ の増減は下表となる.

x	...	0	...	2	...
$f'(x)$	+	/	-	0	+
$f(x)$	↗	/	↘	$\frac{e^2}{4}$	↗

さらに

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

であることに注意すると $y = f(x)$ のグラフは右図となる.

$y = a$ のグラフもあわせて考えると, 方程式 $ax^2 = e^x$ の異なる実数解の個数は

a	...	0	...	$\frac{e^2}{4}$...
個数	0	0	1	2	3

.....(答)

である.

