k を実数として，x についての方程式

$$x^3 - x^2 - kx + 3 - 2k = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $(*)$ について，$0 < x < 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個であるような k の値の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $(*)$ について，$-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個であるような k の値を求めよ．

(23 弘前大 理工 9)

【答】

(1) $1 < k < \dfrac{3}{2}$

(2) $k = 1,\ \dfrac{7}{4}$

【解答】

$$x^3 - x^2 - kx + 3 - 2k = 0 \qquad \cdots\cdots (*)\ (*) \text{ を変形する．}$$

$$(*) \iff x^3 - x^2 + 3 = k(x+2)$$

$$\iff \frac{x^3 - x^2 + 3}{x+2} = k \quad (\because\ x \neq -2 \text{ が確認される})$$

$f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + 3}{x+2}$ とおく．$(*)$ の異なる実数解は曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ の共有点の x 座標に一致する．ここで

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2 - 2x)(x+2) - (x^3 - x^2 + 3)\cdot 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^3 + 5x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2} \\ &= \frac{(x-1)(x+3)(2x+1)}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

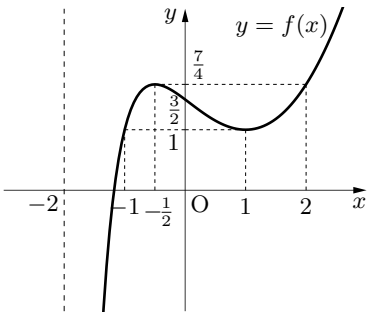
$x \neq -2$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	-2	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-3) = \frac{-27 - 9 + 3}{-3 + 2} = 33,$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3}{-\frac{1}{2} + 2} = \frac{7}{4},$$

$$f(1) = \frac{1 - 1 + 3}{1 + 2} = 1$$



(1) では $0 < x < 2$，(2) では $-1 \leqq x \leqq 2$ における実数解の個数を調べる．$x > -2$ の範囲での曲線 $y = f(x)$ のグラフの概形は右のようになる．

(1) $(*)$ が $0 < x < 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個である条件は，$0 < x < 2$ の範囲で $y = f(x)$ と $y = k$ が異なる 2 点で交わることだから

$$f(0) = \frac{3}{2},\ f(2) = \frac{8-4+3}{2+2} = \frac{7}{4}$$

にも注意すると

$$\boldsymbol{1 < k < \frac{3}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $(*)$ が $-1 \leqq x \leqq 2$ の範囲における異なる実数解の個数が 2 個である条件は，$-1 \leqq x \leqq 2$ で $y = f(x)$ と $y = k$ が異なる 2 点で交わることだから

$$f(-1) = 1$$

にも注意すると

$$\boldsymbol{k = 1,\ \frac{7}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．