関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{(2x-9)e^x}{x}$$

により定める．ただし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ を求めよ．

(2) a は実数とする．方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数を求めよ．

(3) b は実数とする．関数 $g(x)$ を

$$g(x)=x^2-9x+b(x+1)e^{-x}$$

により定める．関数 $g(x)$ が $x=p$ で極小になる実数 p が 2 個存在するように，b の範囲を定めよ．

(23 東京農工大 後 工 2)

【答】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$

(2)

a	$\cdots$	$-e^3$	$\cdots$	$-4e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$	0	$\cdots$
個数	1	2	3	2	1	1	2

(3) $-e^3<b<-4e^{\frac{3}{2}}$

【解答】

$$f(x)=\frac{(2x-9)e^x}{x}$$

(1) $f(x)$ を変形すると

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2-\frac{9}{x}\right)e^x=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 方程式 $f(x)=a$ の実数解の個数は，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a$ の共有点の個数と一致する．$y=f(x)$ のグラフを調べる．

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{9}{x^2}\cdot e^x+\left(2-\frac{9}{x}\right)\cdot e^x\\
&=\frac{9+x(2x-9)}{x^2}\cdot e^x\\
&=\frac{2x^2-9x+9}{x^2}\cdot e^x\\
&=\frac{(2x-3)(x-3)e^x}{x^2}
\end{aligned}$$

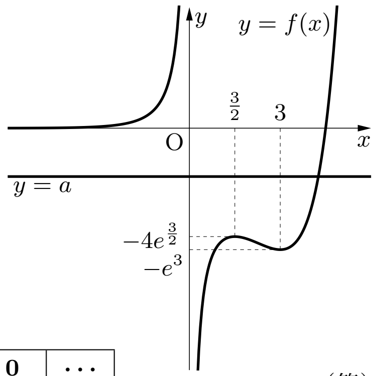
$y=f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	(0)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	／	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)x$	↗	／	↗		↘		↗

である．さらに

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to+0} f(x) = -\infty,$$
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-6e^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = -4e^{\frac{3}{2}},$$
$$f(3) = \frac{-3e^3}{3} = -e^3$$

であるから，$y = f(x)$ のグラフは右のようになる．



直線 $y = a$ のグラフもあわせると，方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数は下表となる．

$\boldsymbol{a}$	$\cdots$	$\boldsymbol{-e^3}$	$\cdots$	$\boldsymbol{-4e^{\frac{3}{2}}}$	$\cdots$	**0**	$\cdots$
個数	**1**	**2**	**3**	**2**	**1**	**1**	**2**

……(答)

(3)
$$g(x) = x^2 - 9x + b(x+1)e^{-x}$$
$$g'(x) = 2x - 9 + b\{1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x}(-1)\}$$
$$= 2x - 9 - bxe^{-x}$$

関数 $g(x)$ が $x = p$ で極小になる実数 p が 2 個存在する条件は，$g'(x)$ の符号が負から正に変わる x が 2 個存在することである．

$g'(0) = -9 \neq 0$ より，$x \neq 0$ のときを調べればよい．$x \neq 0$ のとき

$$g'(x) = \frac{(2x-9)e^x - bx}{e^x} = \frac{xf(x) - bx}{e^x} = (f(x) - b)\frac{x}{e^x}$$

(2) のグラフより，$g'(x)$ $(x \neq 0)$ の符号が変わる x が 2 個以上存在するのは

$$-e^3 < b < -4e^{\frac{3}{2}} \text{ または } b > 0$$

のときである．

(i) $-e^3 < b < -4e^{\frac{3}{2}}$ のとき

(2) のグラフより，$f(x) - b = 0$ となる x は 3 個存在する．これを x_1，x_2，x_3 とおくと，$0 < x_1 < x_2 < x_3$ である．$x > 0$ では $\dfrac{x}{e^x} > 0$ であるから，$g'(x)$ の符号は

$x = x_1$ で負から正に変わり，
$x = x_2$ で正から負に変わり，
$x = x_3$ で負から正に変わる．

したがって，$g(x)$ は極小となる x が 2 個，極大となる x が 1 個存在する．

(ii) $b > 0$ のとき

(2) のグラフより，$f(x) - b = 0$ となる x は 2 個存在する．これを x_1，x_2 とおくと，$x_1 < 0 < x_2$ である．$x < 0$ では $\dfrac{x}{e^x} < 0$，$x > 0$ では $\dfrac{x}{e^x} > 0$ であるから，$g'(x)$ の符号は

$x = x_1$ で正から負に変わり，
$x = x_2$ で負から正に変わる．

したがって，$g(x)$ は極小となる x が 1 個，極大となる x が 1 個存在する．

以上より，関数 $g(x)$ が $x = p$ で極小になる実数 p が 2 個存在する b の範囲は

$$\boldsymbol{-e^3 < b < -4e^{\frac{3}{2}}}$$ ……(答)

である．