(1) 関数

$$y = -\frac{\cos 3x}{\sin^3 x} \quad (0 < x < \pi)$$

の増減と極値を調べ，そのグラフの概形を描け．ただしグラフの凹凸は調べなくてよい．

(2) a を実数の定数とする．x についての方程式

$$-\cos 3x = a \sin^3 x$$

が $\dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{2\pi}{3}$ の範囲に実数解をもつような a の値の範囲を求めよ．

(23 青山学院大 理工 4)

【答】

(1) 略

(2) $-\dfrac{8\sqrt{3}}{9} < a \leqq 2$

【解答】

(1) $f(x) = -\dfrac{\cos 3x}{\sin^3 x}$ とおくと

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{(-\sin 3x)3 \cdot \sin^3 x - \cos 3x \cdot (3\sin^2 x)\cos x}{\sin^6 x} \\ &= \frac{3(\sin 3x \sin x + \cos 3x \cos x)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{3\cos(3x - x)}{\sin^4 x} \\ &= \frac{3\cos 2x}{\sin^4 x} \end{aligned}$$

である．$0 < x < \pi$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

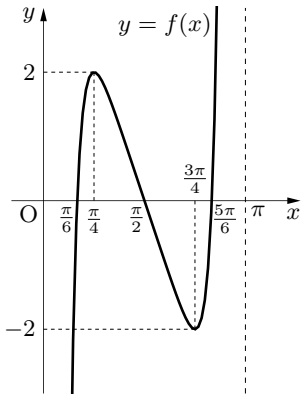
極大値：$f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} = 2,$

極小値：$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^3} = -2$

さらに

$$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x \to \pi - 0} f(x) = \infty$$

であることもあわせると，$y = f(x)$ $(0 < x < \pi)$ のグラフの概形は右図となる．



(2) $$\frac{\pi}{6} < x < \frac{2\pi}{3} \qquad \cdots\cdots ①$$

① のとき，$\sin x \neq 0$ であるから

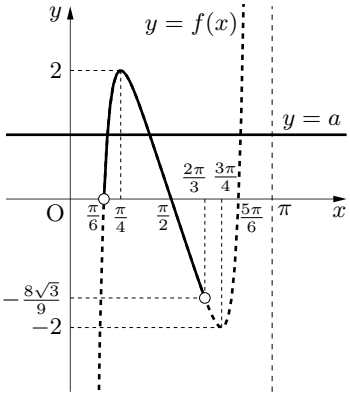
$$-\cos 3x = a\sin^3 x \iff f(x) = a$$

であり，与えられた方程式の実数解は，(1) のグラフの①の部分と，直線 $y = a$ との共有点の x 座標である．

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

$$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3} = -\frac{8\sqrt{3}}{9}$$

であることにも注意すると，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{-\frac{8\sqrt{3}}{9} < a \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．