n を正の偶数とし，$f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}$ とする．さらに，$g(x)=f(x)e^{-x}$ とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 導関数 $g'(x)$ を求めよ．

(2) $x<0$ のとき，$g(x)>1$ であることを示せ．

(3) 方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたないことを示せ．

(23 高知大 医・理工 1)

【答】

(1) $g'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}$

(2) 略

(3) 略

【解答】

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!},\quad g(x)=f(x)e^{-x}$$

(1) $$g'(x)=f'(x)\cdot e^{-x}+f(x)\cdot e^{-x}(-1)$$

ここで

$$\begin{aligned}f'(x)&=0+\left(1+\frac{2x}{2!}+\frac{3x^2}{3!}+\cdots+\frac{nx^{n-1}}{n!}\right)\\&=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\\&=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}g'(x)&=\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)e^{-x}\\&=\boldsymbol{-\frac{x^n}{n!}e^{-x}}\end{aligned}$$ ……(答)

である．

(2) n は正の偶数であるから

$$g'(x)=-\frac{x^n}{n!}e^{-x}\leqq 0$$

等号成立は $x=0$ のときのみであり，$g(x)$ は単調減少である．

よって，$x<0$ において

$$g(x)>g(0)=1\cdot e^0=1\qquad\therefore\quad g(x)>1$$

が成立する． …… (証明終わり)

(3) $f(x)=g(x)e^x$ である．

(i) $x<0$ のとき，(2) の結果により

$$f(x)>1\cdot e^x>0$$

である．

(ii) $x\geqq 0$ のとき，自然数 k に対して，$\frac{x^k}{k!}\geqq 0$ であるから

$$f(x)=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!}\geqq 1$$

である．

以上 (i)，(ii) より，任意の実数 x に対して $f(x)>0$ であるから，方程式 $f(x)=0$ は実数解をもたない． …… (証明終わり)