e を自然対数の底とし，π を円周率とする．以下の問に答えよ．

(1) $e \leqq x < y$ のとき，不等式 $y\log x > x\log y$ が成り立つことを証明せよ．
(2) 3 つの数 $3^{2\sqrt{2}\pi}$, $\pi^{6\sqrt{2}}$, $2^{\frac{9}{2}\pi}$ の大小関係を明らかにせよ．

(23 群馬大 医 4)

【答】

(1) 略
(2) $2^{\frac{9}{2}\pi} > 3^{2\sqrt{2}\pi} > \pi^{6\sqrt{2}}$

【解答】

(1) $e \leqq x < y$ のとき

$$y\log x > x\log y \iff \frac{\log x}{x} > \frac{\log y}{y} \qquad \cdots\cdots (*)$$

であるから，不等式 $(*)$ が成り立つことを示す．

$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ $(x > 0)$ とおくと

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \log x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\log x}{x^2}$$

x	(0)	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$

であり，$f(x)$ の増減は右表となる．

$e \leqq x$ のとき，$f(x)$ は単調減少であるから，$e \leqq x < y$ のとき

$$f(x) > f(y) \text{ すなわち } \frac{\log x}{x} > \frac{\log y}{y}$$

が成り立つ． ……(証明終わり)

(2) $A = 3^{2\sqrt{2}\pi}$, $B = \pi^{6\sqrt{2}}$, $C = 2^{\frac{9}{2}\pi}$ とおくと

$$A = (9^{\sqrt{2}})^{\pi},\ A = (3^{\pi})^{2\sqrt{2}}$$
$$B = (\pi^3)^{2\sqrt{2}}$$
$$C = (\sqrt{2}^{\,9})^{\pi}$$

である．

A, B の大小は 3^{π}, π^3 の大小と一致する．

$e = 2.718\cdots$，$\pi = 3.14\cdots$ なので，$e < 3 < \pi$ であり，(1) から

$$\pi\log 3 > 3\log\pi \qquad \therefore\quad 3^{\pi} > \pi^3 \qquad \therefore\quad A > B$$

である．また，A, C の大小は $9^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\,9}$ の大小と一致する．

$$9^{\sqrt{2}} = 3^{2\sqrt{2}},\quad \sqrt{2}^{\,9} = (\sqrt{2}^{\,3})^3 = (2\sqrt{2})^3$$

$\sqrt{2} = 1.414\cdots$，$e = 2.718\cdots$ なので，$e < 2\sqrt{2} < 3$ であり，(1) から

$$3\log(2\sqrt{2}) > 2\sqrt{2}\log 3 \qquad \therefore\quad (2\sqrt{2})^3 > 3^{2\sqrt{2}} \qquad \therefore\quad C > A$$

以上より

$$C > A > B,\ \text{すなわち}\quad \boldsymbol{2^{\frac{9}{2}\pi} > 3^{2\sqrt{2}\pi} > \pi^{6\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．