$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\sqrt[n]{2^3}+\cdots+\sqrt[n]{2^n})$ を求めよ． $\boxed{\text{ニ}}$

(23 会津大 コンピュータ理工 1(2))

【答】

ニ
$\dfrac{1}{\log 2}$

【解答】

区分求積法を用いる．

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\sqrt[n]{2}+\sqrt[n]{2^2}+\sqrt[n]{2^3}+\cdots+\sqrt[n]{2^n})\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}\\
=&\int_0^1 2^x\,dx\\
=&\left[\frac{1}{\log 2}2^x\right]_0^1\\
=&\boldsymbol{\frac{1}{\log 2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．