$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}=\boxed{},$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)=\boxed{}$$

(23 愛知工大 工・情報科 1(5))

【答】

$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{\pi}$

【解答】

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3\frac{1}{n}\\&=\int_0^1 x^3\,dx\\&=\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{1}{4}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 分子の和を計算すると

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}{n^4}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\frac{n^2(n+1)^2}{4}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2=\frac{1}{4}\end{aligned}$$

である．

また

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{n\pi}{n}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}\pi\\&=\int_0^1\sin\pi x\,dx\\&=\left[-\frac{\cos\pi x}{\pi}\right]_0^1\\&=\boldsymbol{\frac{2}{\pi}}\end{aligned}$$

……(答)

である．

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\frac{k}{n}\pi=\frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}\sin\frac{k\pi}{n}$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\Big[-\cos x\Big]_0^{\pi}\\&=\frac{2}{\pi}\end{aligned}$$

である．