極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{6n}}$ を求めよ．

(23 電気通信大 後 情報理工 5(1)(iii))

【答】 $\dfrac{3}{\pi}\log 3$

【解答】

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{6n}}$$

区分求積法を用いる．$x=\dfrac{\pi k}{6n}$ とおくと

k	$2n+1$	$\longrightarrow$	$3n$
x	$\pi\dfrac{2n+1}{6n}$	$\longrightarrow$	$\dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{n\to\infty}\pi\frac{2n+1}{6n}=\lim_{n\to\infty}\pi\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6n}\right)=\frac{\pi}{3}$$

である．区間 $2n\leqq x\leqq 3n$ を $3n-2n=n$ 等分したときの，微小幅 $\varDelta x$ は $\dfrac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{n}=\dfrac{\pi}{6n}$ であるから

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=2n+1}^{3n}\frac{1}{\sin\frac{\pi k}{6n}}\\
&=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\cdot\frac{6}{\pi}\,dx=\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1-\cos^2 x}\,dx\\
&=\frac{6}{\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-\cos t}+\frac{1}{1+\cos t}\right)(-1)(\cos x)'\,dx\\
&=-\frac{3}{\pi}\Big[-\log|1-\cos t|+\log|1+\cos t|\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=-\frac{3}{\pi}\left[\log\frac{|1+\cos t|}{|1-\cos t|}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\\
&=-\frac{3}{\pi}\left(0-\log\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\\
&=\boldsymbol{\frac{3}{\pi}\log 3} \qquad\cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．