

関数 $f(t) = t - \sin t$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 数直線上を運動する点 P の時刻 t における速度 v が

$$v = tf(t)$$

であるとする。 $t = 0$ における P の座標が 0 であるとき、 $t = \frac{\pi}{2}$ のときの P の座標を求めよ。

- (2) 数直線上を運動する点 Q の時刻 t における速度 v が

$$v = -6f\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right)$$

であるとする。 $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{2}$ までの間に Q が動く道のりを求めよ。

(23 東京農工大 農・工 4)

【答】

(1) $\frac{\pi^3}{24} - 1$

(2) $\frac{5}{6}\pi^2 - 6$

【解答】

- (1) P の速度 v は

$$v = tf(t) = t^2 - t \sin t$$

であるから、 $t = \frac{\pi}{2}$ のときの P の座標 x は、 $t = 0$ における P の座標が 0 であるから

$$\begin{aligned} x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t^2 - t \sin t) dt \\ &= \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \left(\left[t(-\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \cos t dt \right) \\ &= \frac{\pi^3}{24} - 0 - \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi^3}{24} - 1 \end{aligned}$$

……(答)

である。

- (2) Q の速度 v は

$$\begin{aligned} v &= -6f\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right) \\ &= -6 \left\{ \left(2t - \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right) \right\} \end{aligned}$$

であるから、 $t = 0$ から $t = \frac{\pi}{2}$ までの間に Q が動く道のり L は

$$L = 6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \left(2t - \frac{2}{3}\pi\right) - \sin\left(2t - \frac{2}{3}\pi\right) \right| dt$$

である。 $u = 2t - \frac{2}{3}\pi$ とおくと

$$du = 2 dt \quad \begin{array}{c|c} t & 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} \\ \hline u & -\frac{2}{3}\pi \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= 6 \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}} |u - \sin u| \cdot \frac{1}{2} du \\ &= 3 \int_{-\frac{2}{3}\pi}^{\frac{\pi}{3}} |u - \sin u| du \end{aligned}$$

である. $y = \sin u$ の $u = 0$ における接線の方程式が $y = u$ であることも考えると

$$\begin{aligned} -\frac{2}{3}\pi \leq u \leq 0 \quad & u - \sin u \leq 0, \\ 0 \leq u \leq \frac{\pi}{3} \quad & u - \sin u \geq 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} L &= 3 \left\{ -\int_{-\frac{2}{3}\pi}^0 (u - \sin u) du + \int_0^{\frac{\pi}{3}} (u - \sin u) du \right\} \\ &= 3 \left\{ -\left[\frac{1}{2}u^2 + \cos u \right]_{-\frac{2}{3}\pi}^0 + \left[\frac{1}{2}u^2 + \cos u \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \right\} \\ &= 3 \left\{ 2 \cdot (-1) + \left(\frac{2}{9}\pi^2 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{\pi^2}{18} + \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &= \frac{5}{6}\pi^2 - 6 \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

