以下の問いに答えよ.

(1) α を $\tan\alpha = 3$ を満たすような $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい正の数とする. 定積分 $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ を α の式で表せ.

(2) n を 2 以上の自然数とする. 定積分 $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$ を n の式で表せ.

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^2 \left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n dx$ を求めよ.

(23 三重大 後 工 3)

【答】

(1) $\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\sin 2\alpha}{4} - \dfrac{\pi}{8} - \dfrac{1}{4}$

(2) $\dfrac{5^{1-n} - 2^{1-n}}{2(1-n)}$

(3) 0

【解答】

(1) $I_1 = \displaystyle\int_1^3 \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx$ とおく.

$x = \tan\theta$ とおくと

$$dx = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 1 & \longrightarrow & 3 \\ \hline \theta & \frac{\pi}{4} & \longrightarrow & \alpha \end{array}$$

(ただし, α は $\tan\alpha = 3$ を満たすような $\dfrac{\pi}{2}$ より小さい正の数)

であるから

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \cos^4\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta \quad (\because\ \text{半角の公式}) \\ &= \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\alpha} \\ &= \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

(2) $I_2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(1+x^2)^n}\,dx$ とおく.

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{(1+x^2)'}{(1+x^2)^n}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1+x^2)^{-n+1}}{-n+1}\right]_1^2 \quad (\because\ n \geqq 2) \\ &= \boldsymbol{\frac{5^{1-n} - 2^{1-n}}{2(1-n)}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である.

(3) $I_3=\displaystyle\int_1^2\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n dx$ とおく．$1\leqq x\leqq 2$ より

$$2\leqq 1+x^2\leqq 5 \qquad \therefore\quad \frac{2}{5}\leqq\frac{2}{1+x^2}\leqq 1$$

$$\therefore\quad \left(\frac{2}{5}\right)^n\leqq\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n(\leqq 1^n) \qquad \cdots\cdots ①$$

である．また

$$\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n\leqq\frac{2^n\cdot x}{(1+x^2)^n} \qquad \cdots\cdots ②$$

でもある．①，② より

$$\left(\frac{2}{5}\right)^n\leqq\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^n\leqq\frac{2^n\cdot x}{(1+x^2)^n}$$

$$\therefore\quad \int_1^2\left(\frac{2}{5}\right)^n dx\leqq I_3\leqq\int_1^2\frac{2^n\cdot x}{(1+x^2)^n}\,dx$$

が成り立つ．

$$\int_1^2\left(\frac{2}{5}\right)^n dx=\left(\frac{2}{5}\right)^n\Big[x\Big]_1^2=\left(\frac{2}{5}\right)^n\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}0$$

$$\begin{aligned}\int_1^2\frac{2^n\cdot x}{(1+x^2)^n}\,dx&=2^n\cdot\frac{5^{1-n}-2^{1-n}}{2(1-n)}\quad(\because\ (2))\\&=\frac{1}{1-n}\left\{\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}-1\right\}\\&\underset{(n\to\infty)}{\longrightarrow}0\end{aligned}$$

よって，はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty}I_3=\mathbf{0} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．