

定積分  $\int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx$  の値を求めよ.

(23 京都大 理系 1(1))

【答】  $\frac{64}{3} \log 2 - \frac{56}{9}$

【解答】

$1 \leq x \leq 4$  より  $\log x^2 = 2 \log |x| = 2 \log x$  である. 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
 \int_1^4 \sqrt{x} \log(x^2) dx &= 2 \int_1^4 \sqrt{x} \log x dx \\
 &= 2 \left( \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \log x \right]_1^4 - \int_1^4 \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{x} dx \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left( 8 \log 4 - \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left( 16 \log 2 - \left[ \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_1^4 \right) \\
 &= \frac{4}{3} \left\{ 16 \log 2 - \frac{2}{3} (8 - 1) \right\} \\
 &= \frac{64}{3} \log 2 - \frac{56}{9} \qquad \dots \dots (\text{答})
 \end{aligned}$$

である.