次の問いに答えなさい.

(1) 定積分

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+t^2}$$

を求めなさい.

(2) $x > 0$ のとき，定積分

$$\int_{-\frac{1}{x}}^{x} \frac{dt}{1+t^2}$$

を求めなさい.

(23 信州大 教育 4)

【答】

(1) $\frac{\pi}{2}$

(2) $\frac{\pi}{2}$

【解答】

$$I(x) = \int_{-\frac{1}{x}}^{x} \frac{1}{1+t^2}\,dt \quad (x > 0)$$

とおく.

(1) $I(1) = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt = 2\int_{0}^{1} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ である.

$t = \tan\theta$ とおくと

$$dt = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & 0 & \longrightarrow & 1 \\ \hline \theta & 0 & \longrightarrow & \frac{\pi}{4} \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} I(1) &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = 2\Big[\theta\Big]_{0}^{\frac{\pi}{4}} \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{4} \\ &= \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

……(答)

(2) $x > 0$ のとき

$t = \tan\theta$ とおくと

$$dt = \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \qquad \begin{array}{c|ccc} t & -\frac{1}{x} & \longrightarrow & x \\ \hline \theta & \alpha & \longrightarrow & \beta \end{array}$$

ただし，$\tan\alpha = -\dfrac{1}{x}$，$\tan\beta = x$ $\left(-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}\right)$

と α, β をおくことができる．このとき

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{1+\tan^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta = \Big[\theta\Big]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \beta - \alpha \end{aligned}$$

である．ここで

$$\tan\alpha\tan\beta = \left(-\frac{1}{x}\right)\cdot x = -1$$

であり，$\tan\alpha$，$\tan\beta$ を傾きにもつ直線を l_α，l_β とおくと

$$l_\alpha \perp l_\beta \qquad \therefore \quad \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

よって

$$I(x) = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $\tan\alpha\tan\beta = -1$ を解くと

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = -1$$

$$\sin\alpha\sin\beta = -\cos\alpha\cos\beta$$

$$\cos(\beta-\alpha) = 0$$

$-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 < \beta < \frac{\pi}{2}$ より $0 < \beta - \alpha < \pi$ であり

$$\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

である．

- $I(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} I'(x) &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)' \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+\left(-\frac{1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

したがって，$I(x)$ は x の値によらず一定であり

$$I(x) = I(1) = \frac{\pi}{2} \quad (\because\ (1))$$

である．