次の定積分を求めよ.

$$\int_0^1 (x+2)(x-1)^9\,dx$$

(23 兵庫医大 医 1(4))

【答】 $-\dfrac{23}{110}$

【解答】

$I=\displaystyle\int_0^1 (x+2)(x-1)^9\,dx$ とおくと

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \{(x-1)+3\}(x-1)^9\,dx\\&=\int_0^1 \{(x-1)^{10}+3(x-1)^9\}\,dx\\&=\left[\frac{1}{11}(x-1)^{11}+\frac{3}{10}(x-1)^{10}\right]_0^1\\&=-\left(-\frac{1}{11}+\frac{3}{10}\right)\\&=\boldsymbol{-\frac{23}{110}}\end{aligned}$$

……(答)

- 【解答】は $t=x-1$ の置換積分と同じである.

$dt=dx$

x	0	$\longrightarrow$	1
t	-1	$\longrightarrow$	0

であるから

$$I=\int_{-1}^0 (t+3)t^9\,dt=\left[\frac{1}{11}t^{11}+\frac{3}{10}t^{10}\right]_{-1}^0=\frac{1}{11}-\frac{3}{10}=-\frac{23}{110}$$

である.

- 部分積分法を用いてもよい.

$$\begin{aligned}I&=\left[(x+2)\cdot\frac{(x-1)^{10}}{10}\right]_0^1-\int_0^1 1\cdot\frac{(x-1)^{10}}{10}\,dx\\&=-\frac{2}{10}-\left[\frac{(x-1)^{11}}{10\cdot 11}\right]_0^1\\&=-\frac{2}{10}-\frac{1}{110}\\&=-\frac{23}{110}\end{aligned}$$

- 部分積分法を用いると次の等式が得られる.

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)^m(\beta-x)^n\,dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}(\beta-\alpha)^{m+n+1}\quad (m,\ n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数})$$